CÁLCULO VECTORIAL

POR

BENTO DE JESUS CARAÇA

PUBLICAÇÕES DO NÚCLEO DE
MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA

[illegible]

CALCULO VECTORIAL

CÁLCULO VECTORIAL

PUBLICAÇÕES DO NÚCLEO DE

MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA

N.º 1 — Bento de Jesus Caraça — CÁLCULO VECTORIAL

A PUBLICAR:

António da Silveira — INTRODUÇÃO À TEORIA DA ELECTRICIDADE E DO MAGNETISMO

António Monteiro — TEORIA DAS MATRIZES

Rui Luís Gomes — RELATIVIDADE RESTRITA

Herculano Amorim Ferreira — RADIAÇÃO DO CORPO NEGRO: TEORIA QUÂNTICA DOS CALORES ESPECÍFICOS

Manuel Valadares — EFEITO FOTO-ELÉCTRICO

PUBLICAÇÕES DO NÚCLEO DE
MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA
N.º 1

CÁLCULO VECTORIAL

POR

BENTO DE JESUS CARAÇA
PROFESSOR DO INSTITUTO SUPERIOR DE
CIÊNCIAS ECONÓMICAS E FINANCEIRAS

DEPOSITÁRIA
LIVRARIA SÁ DA COSTA
LARGO DO POÇO NOVO
LISBOA / 1937

CITAÇÕES

Os números em elzevir referem-se a fórmulas.
Os números em «kabel» fino a parágrafos.
Os números em «kabel» grosso a capítulos.

Exemplo:

Pg. 87, linha 1: [**1**, 7, 45)] → fórmula 45) do parágrafo 7 do capítulo 1.º

CAPÍTULO I

ÁLGEBRA VECTORIAL

I. FUNDAMENTOS

1. — **Histórica.** O cálculo vectorial è de constituïção relativamente recente e anda ligado, na sua origem, à procura duma possível representação geométrica dos números imaginários. Por isso, os vectores aparecem, considerados como linhas dirigidas, na obra de C. Wessel *Essai sur la représentation de la direction* (1797) e de J. Argand *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806). Com a publicação das obras de G. Bellavitis sôbre as equipolências (a partir de 1832) da *Ausdehnungslehre* de H. Grassmann (a partir de 1844) e dos trabalhos de W. Hamilton sôbre os Quaterniões (a partir de 1843), pode considerar-se fechado o primeiro ciclo, o ciclo preparatório, da história do *Cálculo Vectorial.*

Deve-se principalmente a J. W. Gibbs e O. Heaviside (ambos na segunda metade do século XIX) a estruturação dêste ramo das ciências matemáticas com a forma que hoje apresenta.

Define-se ainda hoje, freqüentemente, *vector* como um *segmento de recta orientado,* tomando-o, portanto, como uma entidade de carácter geométrico, como o era para os iniciadores do cálculo vectorial. Mas os modernos pontos de vista sôbre êste corpo de doutrina não se compadecem com tal critério fundamental — há que, a partir do conceito geométrico de segmento orientado, deduzir outro, de carácter analítico, que fará, pròpriamente, o objecto de estudo do ramo de Análise que designamos por Cálculo Vectorial.

É essa orientação, seguida, por exemplo, por M. Lagally — *Vektor-Rechnung,* a adoptada nos parágrafos seguintes.

2. — **Segmento orientado. Translacção.** *Definições.* Consideremos uma recta R) e, a partir dum ponto arbitrário O, fixemos sôbre ela um sentido positivo e um sentido negativo (fig. 1).

A convenção da existência de sentidos opostos numa mesma recta é fundamental em tudo que vai seguir-se. Ela permite-nos, a partir de cada segmento ou porção da recta, definido por dois pontos A e B, distinguir dois *segmentos dirigidos* ou *orientados* — o segmento de A para B, *origem* A e *extremidade* B, que representaremos por AB, e o segmento de B para A, *origem* B e *extremidade* A, que representaremos por BA.

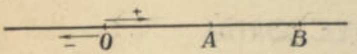


Fig. 1

Um *segmento dirigido* ou *orientado* é, por conseqüência, definido por dois pontos quaisquer do espaço, A e B, e pela adjunção do conceito de *ordem* a que se sujeitam êsses dois pontos.

Dois segmentos dirigidos que diferem um do outro apenas pela ordem dos pontos que os definem, dizem-se *opostos*: o segmento dirigido BA é o oposto do segmento dirigido AB.

Chama-se *módulo* dum segmento orientado AB à distância, em valor absoluto, dos dois pontos A e B; representá-lo-hemos por mod AB.

Atribuamos a mod AB o sinal + ou o sinal —, conforme o sentido de A para B coïncidir ou não com o sentido positivo da recta sôbre a qual existe AB; ao número assim obtido dá-se o nome de *medida algébrica* de AB e representá-lo-hemos por med AB; tem-se portanto med AB $= \pm$ mod AB conforme o sentido de AB fôr positivo ou negativo, em relação ao eixo sôbre o qual se encontra:

$$1) \quad med\, AB = \begin{cases} +\, mod\, AB \leftarrow AB \textit{ tem sentido positivo} \\ -\, mod\, AB \leftarrow AB \textit{ tem sentido negativo.} \end{cases}$$

Qualquer que seja o sinal do sentido de AB, é sempre verdade que

$$2) \qquad med\, AB = -\, med\, BA.$$

Dá-se o nome de *translacção* a todo o movimento dum corpo no espaço tal que as posições inicial e final de cada um dos seus pontos definem segmentos orientados paralelos e com as mesmas medidas algébricas (igualdade de módulos e de sentidos).

Uma translacção fica conhecida portanto desde que se conheça o segmento orientado definido pelas posições inicial e final dum dos pontos do corpo considerado; as posições finais dos outros pontos são determinadas por segmentos orientados paralelos e de medidas algébricas iguais ao primeiro.

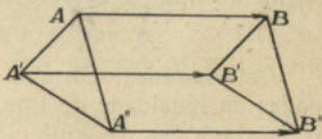


Fig. 2

Êste facto vem chamar a atenção para o papel importante que desempenha a existência de segmentos orientados nas condições indicadas, a que chamaremos *segmentos equipolentes*.

Dois segmentos equipolentes AB e A'B' (fig. 2) são portanto tais que os quatro pontos A, B, A', B', definem um paralelogramo, a não ser que AB e A'B' existam sôbre a mesma recta; neste caso a equipolência é definida simplesmente pela concordância de sentidos e igualdade de módulos.

Sempre que nos quisermos referir, indistintamente, ao segmento orientado AB e aos seus equipolentes, diremos que AB é definido ou dado *a menos duma equipolência*.

Estas definições permitem-nos agora dizer que *tôda a translacção no espaço é, independentemente do local em que se realiza, determinada unìvocamente por um segmento orientado, dado a menos duma equipolência;* representaremos a translacção, determinada pelo segmento AB, por t_{AB}.

Daqui resulta que se AB é equipolente a A'B', AB se pode fazer coïncidir com A'B' por meio da translacção $t_{AA'}$ (v. fig. 2).

Consideraremos ainda como iguais tôdas as translacções que só diferem pelo local do espaço em que se efectuam, isto é, que são determinadas pelo mesmo segmento orientado, definido a menos duma equipolência:

3) $\qquad t_{AB} = t_{A'B'} \leftarrow$ AB *equipolente a* A'B'.

Chama-se *translacção nula* aquela em que a origem coïncide com a extremidade e escreve-se

4) $$t_{AA} = 0.$$

Ao segmento orientado correspondente chama-se, ainda, segmento nulo, e escreve-se

5) $$AA = 0.$$

Propriedades. Do que está dito, deduz-se que as propriedades da igualdade de translacções são a resultante imediata, o decalque das da equipolência e recìprocamente. Ocupemo-nos destas.

1.ª (reflexiva). *Todo o segmento orientado é equipolente a si mesmo*; é uma conseqüência imediata da definição.

2.ª (simétrica). *Se AB é equ polente a $A'B'$, também $A'B'$ é equipolente a AB*; com efeito, o paralelogramo definido por A, B, A′, B′ é o mesmo que o definido por A′, B′, A, B.

3.ª (transitiva). *Se AB é equipolente a $A'B'$ e $A'B'$ equipolente a $A''B''$, é AB equipolente a $A''B''$*; com efeito, da definição resulta que A″B″ é paralelo a AB (por ser paralelo a A′B′ e êste a AB) que os sentidos coïncidem e que é

$$mod\, A''B'' = mod\, A'B' = mod\, AB.$$

3. — **Composição de translacções.**

A). **Translacções com a mesma direcção.** *Definição.* Sejam dadas duas translacções *paralelas*; como os segmentos orientados que as definem são definidos a menos duma equipolência [2], pode sempre supôr-se que êles estão sôbre a mesma recta e que, além disso, a origem dum coïncide com a extremidade do outro. Sejam então AB e BC êsses segmentos e t_{AB} e t_{BC} as translacções correspondentes.

Consideremos a translacção t_{AC} cuja origem é a origem da primeira e cuja extremidade é a extremidade da segunda. Á operação pela qual às translacções t_{AB} e t_{BC} se faz corresponder t_{AC} chama-se *composição* ou *adição* de translacções; à translacção t_{AC} chama-se *resultante* ou *soma* das translacções t_{AB} e t_{BC} e escreve-se

6) $$t_{AC} = t_{AB} + t_{BC};$$

ao segmento orientado AC chama-se, ainda, *soma* dos segmentos orientados AB e BC e escreve-se

7) $$AC = AB + BC.$$

As igualdades 6) e 7) não são, afinal, mais do que traduções diferentes da mesma operação fundamental — a da *composição* de duas translacções ou dos segmentos orientados correspondentes.

Como se vê, a operação é de efectivação simples: faz-se coïncidir a origem duma (a segunda) com a extremidade da outra (a primeira) e toma-se a translacção determinada pela origem da primeira e extremidade da segunda. Na figura junta estão figurados casos que podem apresentar-se quanto aos sentidos dos segmentos orientados.

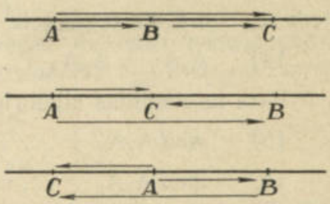


Fig. 5

As setas inferiores representam os sentidos dos segmentos a compôr; as superiores o do segmento soma.

Em particular, tem-se imediatamente a partir da definição e de [2, 4)]

8) $$t_{AB} + t_{BA} = t_{AA} = 0$$

ou 9) $$AB + BA = 0$$

que nos indica que *a soma de dois segmentos orientados opostos é nula.*

A construção da soma mostra ainda que entre as medidas algébricas se verificam, quaisquer que sejam os sentidos dos segmentos considerados, as relações

10) $$med\,AC = med\,AB + med\,BC,$$

e, em particular,

11) $$med\,AB + med\,BA = 0$$

que coïncide, aritmèticamente, com [2, 2)].

A composição de mais de duas translacções define-se como habitualmente se define a adição de mais de duas parcelas: compõem-se as duas primeiras, a translacção obtida compõe-se com a terceira e assim sucessivamente. Resulta daqui que $t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} = t_{AD}$ e, em geral,

12) $$t_{A_1A_2} + t_{A_2A_3} + \ldots + t_{A_{n-1}A_n} = t_{A_1A_n},$$

igualdade à qual corresponde, para os segmentos orientados correspondentes,

13) $$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$$

relação válida, pelo que está dito, qualquer que seja a posição relativa, sôbre a recta, dos pontos $A_1, \ldots A_n$. Em particular tem-se, como conseqüência imediata de 13) e 9),

14) $$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0.$$

Para as medidas algébricas verificam-se as relações gerais

15) $$med\, A_1A_2 + \ldots + med\, A_{n-1}A_n = med\, A_1A_n$$

16) $$med\, A_1A_2 + \ldots + med\, A_{n-1}A_n + med\, A_nA_1 = 0.$$

A justificação do nome *adição* dado, também, à operação que estamos estudando, está nos resultados do estudo, a que vamos proceder, das suas propriedades.

Propriedades. 1.ª — *A operação é uniforme.* Com efeito, de $t_{AB} = t_{A'B'}$ e $t_{BC} = t_{B'C'}$ resulta imediatamente, em virtude da definição, $t_{AB} + t_{BC} = t_{A'B'} + t_{B'C'}$ e relação análoga para os segmentos orientados.

2.ª — *É* $t_{AB} + 0 = t_{AB}$. Com efeito:

$$t_{AB} + 0 = t_{AB} + t_{BB} = t_{AB}\,.$$

3.ª — *A operação é comutativa.* A igualdade: $t_{AB} + t_{CD} = t_{CD} + t_{AB}$, que exprime a comutatividade, é, como fàcilmente se reconhece, uma conseqüência imediata da construção por meio da qual foi definida a operação.

4.ª — *A operação é associativa.* Anàlogamente, da construção resulta que

$$t_{AB} + (t_{BC} + t_{CD}) = (t_{AB} + t_{BC}) + t_{CD}\,.$$

5.ª — *De* $t_{AB} + t_{CD} = t_{A'B'} + t_{CD}$ *resulta* $t_{AB} = t_{A'B'}$. Somemos, com efeito, a ambos os membros da igualdade, a translacção t_{DC}; a igualdade mantém-se, pela propriedade 1.ª, e vem $t_{AB} + t_{CD} + t_{DC} = t_{A'B'} + t_{CD} + t_{DC}$ donde, pela associatividade, $t_{AB} + (t_{CD} + t_{DC}) = t_{A'B'} + (t_{CD} + t_{DC})$ donde [8)] $t_{AB} + 0 = t_{A'B'} + 0$, donde, finalmente, pela propriedade 2.ª, $t_{AB} = t_{A'B'}$.

Em conclusão, a operação goza das mesmas propriedades que a adição ordinária, à parte aquelas que se prendem com os conceitos de *maior que* e *menor que,* que aqui não foram introduzidos mas que não são essenciais no algorítmo soma (vide, por exemplo, as propriedades da soma de números complexos, *Lições* (1), Vol. I, **2,** 3).

É fácil definir, agora, subtracção de duas translacções. *Chama-se diferença das duas translacções* t_{AB} e t_{CD} *e escreve-se* $t_{AB} - t_{CD}$, *à soma* $t_{AB} + t_{DC}$:

17) $$t_{AB} - t_{CD} = t_{AB} + t_{DC}.$$

Verifica-se imediatamente que a diferença é aquela translacção que somada com o subtractivo t_{CD} reproduz o aditivo t_{AB}; efectivamente, $(t_{AB} + t_{DC}) + t_{CD} = t_{AB} + (t_{DC} + t_{CD}) = t_{AB} + 0 = t_{AB}$.

Com esta propriedade fica estabelecida a analogia com a subtracção ordinária; as duas operações podem fundir-se numa só, a *soma algébrica,* regida por um conjunto de leis análogas às da soma algébrica ordinária, cuja verificação omitimos por ser longa e fastidiosa.

B). **Translacções com direcções diferentes.** *Definição.* Dadas duas translacções não paralelas quaisquer, define-se duma maneira inteiramente análoga à anterior, a operação da *composição:* faz-se coïncidir a origem da segunda com a extremidade da primeira e considera-se como *resultante* ou

(1) A designação *Lições* refere-se a *Lições de Álgebra e Análise* do autor.

soma das duas translacções dadas aquela translacção cuja origem é a da primeira e cuja extremidade é a da segunda (v. fig. 4, as setas indicam os sentidos dos segmentos orientados).

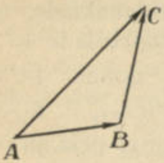


Fig. 4

Escreve-se ainda

6) $t_{AB} + t_{BC} = t_{AC}$ e 7) $AB + BC = AC$,

continuando, também, a chamar-se a AC *soma* dos dois segmentos orientados AB e BC.

A adição, ou composição, de mais de duas translacções define-se como habitualmente; na fig. 5 está construída a soma de três translacções $t_1 = t_{AB}$, $t_2 = t_{BC}$, $t_3 = t_{CD}$.

Propriedades. 1.ª — *A operação é uniforme.* Resulta imediatamente da construção.

2.ª — *É* $t_{AB} + 0 = t_{AB}$. Foi já estabelecida atrás.

3.ª — *A operação é comutativa.* É o que resulta da figura 6, visto que AB é equipolente a DC e BC equipolente a AD.

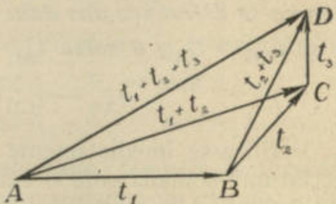


Fig. 5

4.ª — *A operação é associativa.* Com efeito, da figura 5 resulta que é $AD = t_1 + t_2 + t_3$ e que, por outro lado, se tem $AD = t_1 + (t_2 + t_3)$ e $AD = (t_1 + t_2) + t_3$.

5.ª — *De* $t_1 + t_3 = t_2 + t_3$ *resulta* $t_1 = t_2$. Demonstração inteiramente análoga à da propriedade 5.ª anteriormente estabelecida.

Em conclusão, a operação goza das propriedades da adição ordinária, com o que se justifica o emprêgo da designação *soma*. Quando as translacções tiverem tôdas a mesma direcção, a operação reduz-se à anteriormente estudada, com tôdas as conclusões que lá foram deduzidas.

Verificam-se aqui as igualdades 12), 13) e 14), mas as igualdades 10), 15) e 16), sôbre as relações entre as medidas algébricas, são privativas do caso em que as translacções têm tôdas a mesma direcção.

Aquelas são, portanto, mais gerais que estas.

Pode ainda definir-se *subtracção* de translacções com direcções diferentes e, para o fazer, adoptaremos a mesma definição:

17) $$t_{AB} - t_{CD} = t_{AB} + t_{DC}.$$

A figura 7 mostra como se construi a diferença.

A diferença das translacções $t_1 = AB$ (aditivo) e $t_2 = BC$ é a translacção $t_1 - t_2 = t_{AC'}$.

Vê-se na figura que a soma de $t_1 - t_2 = t_{AC'} = t_{A'B}$ com $t_2 = t_{BC}$ é $t_{A'C} = t_{AB} = t_1$ o que mostra que a diferença é ainda aquela translacção que somada com a translacção subtractivo reproduz o aditivo. Com isto fica estabelecida a identidade da operação agora definida com a subtracção ordinária.

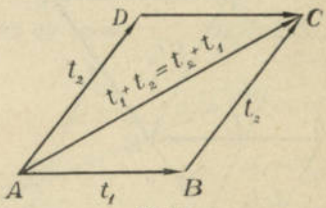


Fig. 6

4. — **Produto por um número real.** Na definição e estudo da multiplicação duma translacção, ou um segmento orientado, por um número real, seguiremos as étapes seguintes: *a)* o número é inteiro e positivo; *b)* o número é fraccionário positivo da forma $\frac{1}{n}$; *c)* o número é racional positivo qualquer; *d)* o número é real positivo qualquer; *e)* o número é real negativo.

A). **Número inteiro e positivo n.** *Definição.* Definiremos a operação, cujo resultado se representa por $n.t_{AB}$, pela igualdade

18) $$n.t_{AB} = \overbrace{t_{AB} + t_{AB} + \ldots + t_{AB}}^{(n)}$$

à qual corresponde, operando sôbre os segmentos orientados, a definição de $n.AB$ pela igualdade

19) $$n.AB = \overbrace{AB + AB + \ldots + AB}^{(n)}.$$

Se $n = 0$ ou $t_{AB} = 0$, põe-se, por definição,

20) $$0.t_{AB} = 0, \quad n.t_{AA} = 0.$$

Propriedades. 1.ª — *O produto $n.t_{AB}$ é uma nova translacção com a mesma direcção e sentido que t_{AB} e com módulo igual a $n.mod\, t_{AB}$*. Resulta imediatamente da definição e das propriedades da soma; a relação

21) $$mod\,(n.t_{AB}) = n.mod\, t_{AB}$$

é conseqüência directa de [3, 15)].

A operação de que estamos tratando consiste, portanto, na *dilatação* duma translacção na sua direcção e sentido.

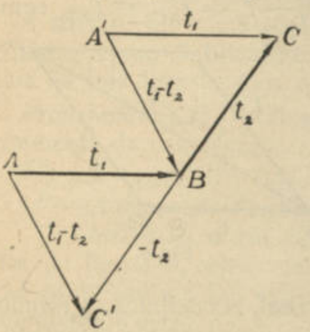


Fig. 7

2.ª — *A operação é uniforme.* É conseqüência imediata da uniformidade da soma. Notemos, em particular, que esta propriedade significa que: de $n = n'$ resulta $n.t_{AB} = n'.t_{AB}$; de $t_{AB} = t_{A'B'}$ resulta $n.t_{AB} = n.t_{A'B'}$.

3.ª — *Do anulamento do produto resulta o anulamento de, pelo menos, um dos factores.* Efectivamente, se nenhum dos factores é nulo, a soma 18) é necessàriamente diferente de zero.

4.ª — *Se $n \neq 0$, de $n.t_{AB} = n.t_{CD}$ resulta $t_{AB} = t_{CD}$; se $t_{AB} \neq 0$, de $n.t_{AB} = n'.t_{AB}$ resulta $n = n'$*. É conseqüência imediata da uniformidade.

5.ª — *A operação é distributiva em relação à soma de números.* Com efeito, das propriedades da soma tem-se

$$(m+n).t_{AB} = \overbrace{t_{AB} + \ldots + t_{AB}}^{(m+n)} = (\overbrace{t_{AB} + \ldots + t_{AB}}^{(m)}) +$$
$$+ (\overbrace{t_{AB} + \ldots + t_{AB}}^{(n)}) \quad \text{donde}$$

22) $$(m+n).t_{AB} = m.t_{AB} + n.t_{AB}.$$

6.ª — *A operação é distributiva em relação à soma de translacções.* A figura 8, em que se fêz $n = 3$, mostra que a igualdade

23) $$n.(t_1 + t_2) = n.t_1 + n.t_2$$

é uma conseqüência da definição, da construção da soma e das propriedades da semelhança de triângulos.

7.ª — *A operação é comutativa, e associativa no sentido da seguinte igualdade*

24) $$m.(n.t_{AB}) = n.(m.t_{AB}) = (m.n).t_{AB}\,.$$

É de verificação imediata.

B). **Número fraccionário positivo da forma** $\frac{1}{n}$. *Definição.* Dada a translacção t_{AB} e o número fraccionário $\frac{1}{n}$, chama-se *produto* do número pela translacção, e representa-se por $\frac{1}{n}\cdot t_{AB}$, àquela translacção (se existir) cujo produto por n é t_{AB}:

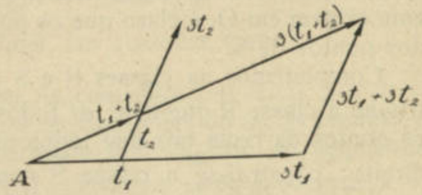


Fig. 8

25) $$\frac{1}{n}\cdot t_{AB} = t_{xy} \longleftarrow n.t_{xy} = t_{AB}\,.$$

A demonstração da existência de t_{xy}, satisfazendo à igualdade de condição, é fácil: basta tomar para t_{xy} aquela translacção com a mesma direcção e sentido que t_{AB} e tal que $n.mod\, t_{xy} = mod\, t_{AB}$. É claro que esta translacção é única, em virtude da *uniformidade* da operação da multiplicação por um número inteiro e positivo.

Propriedades. Verifica-se fàcilmente, a partir da definição, que se mantêm as propriedades atrás estabelecidas.

C). **Número racional positivo qualquer.** Seja a translacção t_{AB} e o número racional positivo $\frac{m}{n}$. Define-se produto de $\frac{m}{n}$ por t_{AB}, que se representa por $\frac{m}{n}\cdot t_{AB}$, por meio da igualdade

26) $$\frac{m}{n}\cdot t_{AB} = m.\left(\frac{1}{n}\cdot t_{AB}\right)$$

em virtude da qual a operação fica reduzida às estudadas nos dois casos anteriores.

É óbvio que se mantêm as propriedades.

D). **Número real positivo qualquer.** *Definição.* Seja a translacção t_{AB} e o número real positivo λ, definido pelo corte (L,M) no conjunto dos números racionais. Fixado um ponto arbitrário O como origem sôbre uma recta, formemos os produtos $r.t_{AB}$ e $s.t_{AB}$ onde r é um número qualquer de L e s um número qualquer de M. Como é $r < s$, tem-se $r.mod\, t_{AB} < s.mod\, t_{AB}$; se chamarmos R e S as classes dos pontos extremidades respectivamente dos produtos r.AB e s.AB, com origem em O, é claro que os pontos de R estão à esquerda dos pontos de S.

Completemos as classes R e S do modo seguinte: construi-se a classe $\overline{R}$ que tem: *a)* todos os pontos de R; *b)* todos os pontos da recta tais que todos os pontos de S lhe estão à direita; construi-se a classe $\overline{S}$ com os pontos que não formam $\overline{R}$.

As classes $\overline{R}$ e $\overline{S}$ formam um corte na recta; seja P o ponto por êle definido; *por definição, toma-se o segmento orientado OP como produto λ.AB e, correspondentemente, a translacção t_{OP} como produto $\lambda.t_{AB}$*:

27) $$\lambda . t_{AB} = t_{OP} .$$

Da definição resulta, claro, que a translacção t_{OP} existe sempre e é única.

Propriedades. Da definição e das propriedades gerais dos números reais [*Lições*, Vol. I, **1, 42** a **50**] resulta que as propriedades mencionadas nos casos anteriores se mantêm; omitimos, por ser longa, a verificação respectiva.

E). **Número real negativo qualquer.** *Definição.* Seja o segmento orientado AB e o número real e negativo λ. Façamos $\mu = -\lambda$, $\mu > 0$. *Por definição, chama-se produto de λ por AB, que continua a representar-se por λ.AB, ao segmento orientado oposto* [2] *do segmento orientado μ.AB.*

É claro que o *oposto* de μ.AB é μ.BA visto que

$\mu.AB + \mu.BA = \mu.(AB + BA) = \mu.0 = 0$ logo, tem-se

28) $\lambda.AB = \mu.BA \quad \lambda < 0, \quad \mu = -\lambda.$

Anàlogamente se tem

28 *a*) $\lambda.t_{AB} = \mu.t_{BA} \quad \lambda < 0, \quad \mu = -\lambda.$

Propriedades. Da definição resulta imediatamente que se mantêm tôdas as anteriores, excepto a primeira, que aqui toma o aspecto seguinte: *o produto* $\lambda.t_{AB}$, $\lambda < 0$, *é uma nova translacção com a mesma direcção que* t_{AB}, *sentido oposto, e de módulo tal que*

29) $$mod\,(\lambda.t_{AB}) = |\lambda|.mod\,t_{AB},$$

igualdade esta que vale, afinal, em qualquer caso.

5. — **Sistemas lineares.** As considerações feitas nos dois parágrafos anteriores podem ser resumidas do modo seguinte: Partiu-se da entidade *translacção* $t_1 = t_{AB}$ (ou do segmento orientado correspondente AB) e definiram-se duas operações — a *composição* ou *adição* $t_1 + t_2$ e o *produto* $\rho.t_1$ da translacção por um número real. Provou-se que essas operações gozam das propriedades seguintes:

1) A soma de duas translacções é uma translacção:

$$t_1 + t_2 = t_3.$$

2) Existe uma translacção especial, denominada translacção *nula*, $t_{AA} = 0$, tal que $t_1 + t_{AA} = t_1$.

3) A adição é comutativa: $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$.

4) É associativa: $t_1 + (t_2 + t_3) = (t_1 + t_2) + t_3$.

5) De $t_1 + t_3 = t_2 + t_3$ resulta $t_1 = t_2$; de $t_1 = t_2$ resulta $t_1 + t_3 = t_2 + t_3$.

6) O produto $\rho.t_1$ é uma translacção: $\rho.t_1 = t_2$.

7) De $\rho = \sigma$ resulta $\rho.t_1 = \sigma.t_1$; de $t_1 = t_2$ resulta $\rho.t_1 = \rho.t_2$.

8) Do anulamento do produto resulta o anulamento de, pelo menos, um dos factores:

$$\rho.t_1 = 0 \;\rightarrow\; \rho = 0 \quad \text{ou} \quad t_1 = 0.$$

9) Se $\rho \neq 0$, de $\rho.t_1 = \rho.t_2$ resulta $t_1 = t_2$; se $t_1 \neq 0$, de $\rho.t_1 = \sigma.t_1$ resulta $\rho = \sigma$.

10) A operação é distributiva em relação à soma de números reais: $(\rho + \sigma).t_1 = \rho.t_1 + \sigma.t_1$.

11) É distributiva em relação à soma de translacções:

$$\rho.(t_1 + t_2) = \rho.t_1 + \rho.t_2.$$

12) É comutativa e associativa no sentido da igualdade

$$\rho.(\sigma.t_1) = \sigma.(\rho.t_1) = (\rho.\sigma).t_1.$$

Pois bem; sempre que, dada uma classe U de entidades *quaisquer* u_i:

a) se define uma operação de *composição* ou *adição*, por meio da qual de u_i e u_k se determina u_l (também pertencente a U) a que se dá o nome de *soma* de u_i com u_k:

$$u_l = u_i + u_k;$$

b) se define uma operação $\rho.u_i$, de multiplicação de elementos dessa classe por números dum corpo **R**;

c) além disso, essas duas operações gozam das dôze propriedades cujo resumo acabamos de dar;

diz-se que a classe U *constitui um sistema linear, no corpo* **R**, *em relação à operação da adição ou composição.*

Em virtude destas definições, podemos então dizer que *a classe das translacções no espaço constitui um sistema linear, no corpo dos números reais, em relação à operação de composição.*

Dependência e independência linear. *Dimensões do sistema.* Sejam $u_1, u_2, \ldots u_n$, n elementos do sistema linear U e **R** o corpo de números no qual êle é definido.

Diz-se que entre êsses n elementos existe uma relação linear, no corpo **R**, *de coeficientes não todos nulos, quando há* $n+1$ *números de* **R**, $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \lambda_{n+1}$, *dos quais entre os primeiros n há um, pelo menos, diferente de zero, e tais que*

30) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i = \lambda_{n+1}.$$

Os números $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots n$, dizem-se os *coeficientes* da relação linear.

A relação diz-se *linear e homogénea* quando $\lambda_{n+1} = 0$, isto é, quando

31) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i = 0.$$

Nesta hipótese, diz-se, ainda, que os n elementos u_i são *linearmente dependentes* no corpo **R**.

Quando, qualquer que seja o conjunto de n números de **R**, não todos nulos, não tem nunca lugar a relação 31) ou, por outras palavras, quando 31) só é possível se os λ_i fôrem todos nulos, os n elementos u_i dizem-se *linearmente independentes* no corpo **R**.

Sempre que não se faz menção do corpo de números ao qual pertencem os λ_i, *entender-se há que êles são números reais quaisquer*; é o que suporemos daqui em diante.

Um sistema linear diz-se a *n dimensões* quando:

a) existem nele n elementos linearmente independentes;

b) quaisquer que sejam os $n + 1$ elementos $u_1, \ldots u_n$, u_{n+1}, êles são sempre linearmente dependentes.

Em todo o sistema linear U *a n dimensões, há sempre n elementos linearmente independentes $u_i, i = 1, 2, \ldots n$, tais que, dado um elemento qualquer u de* U, *existe um conjunto único de números reais $\rho_1, \ldots \rho_n$ não todos nulos, satisfazendo à relação*

32) $$u = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot u_i.$$

Com efeito, sejam $u_1, u_2, \ldots u_n$, n elementos linearmente independentes, os quais existem sempre porque o sistema tem, por hipótese, n dimensões.

a) De serem $u, u_1, \ldots u_n$ linearmente dependentes, resulta que $\lambda_1 . u_1 + \ldots + \lambda_n . u_n + \lambda_{n+1} . u = 0$ com $\lambda_{n+1} \neq 0$, porque se fôsse $\lambda_{n+1} = 0$ os n elementos u_i seriam linearmente dependentes contra a hipótese; resolvendo esta igualdade em ordem a u, tem-se 32), onde é $\rho_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}}$.

b) O conjunto dos $\rho_i, i = 1, 2, \ldots n$, é único; se houvesse outro conjunto de n números reais, sejam $\sigma_i, i = 1, 2, \ldots n$, tal que $u = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot u_i$, ter-se-ia $\sum \sigma_i \cdot u_i = \sum \rho_i \cdot u_i$ donde $\sum (\rho_i - \sigma_i) \cdot u_i = 0$; ora êstes n coeficientes têm que ser todos nulos, porque se o não fôssem os u_i não seriam linearmente independentes, logo $\rho_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Aos n elementos u_i, linearmente independentes (e que, quanto ao resto, são escolhidos arbitràriamente) nos quais se exprimem, segundo 32), todos os outros elementos de U, dá-se o nome de *base* do sistema linear U; aos $\rho_i \cdot u_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, dá-se o nome de *componentes* de u e aos ρ_i o de *coeficientes* de u na base $u_1, u_2, \ldots u_n$.

As definições dadas levantam a seguinte questão: *¿ a quantas dimensões é o sistema linear das translacções no espaço?* A resposta será dada num dos parágrafos seguintes [7].

6. — **Definição de vector.** O conceito de translacção é de carácter físico; o de segmento orientado, ao qual reduzimos o seu estudo, é de carácter geométrico. Convém ainda, se possível, introduzir uma nova entidade, não de carácter físico ou geométrico, mas *aritmético*, entidade que possa ser sujeita aos métodos gerais da Análise, cuja fecundidade em tantos domínios tem sido posta à prova.

Isso é possível, e faz-se pela introdução dum novo conceito — o *vector livre* — definido como segue:

Dados dois pontos A e B e o seu segmento orientado AB, chama-se vector livre de AB, e representa-se por $\overrightarrow{AB}$, a uma função dos dois pontos A e B, e portanto de AB

$$\overrightarrow{AB} = f(AB)$$

satisfazendo às condições seguintes:

1.ª — Essa função toma o mesmo valor para todos os segmentos orientados equipolentes a AB e só para êsses.

A igualdade de vectores livres, tradução aritmética do conceito geométrico de equipolência de segmentos orientados, é, portanto, reflexiva, simétrica e transitiva.

2.ª — Põe-se $f(\mathrm{AA}) = 0$ e por esta igualdade se define *vector nulo*.

3.ª — Sôbre essa função é definida a operação de *adição* do seguinte modo: dados os dois segmentos orientados AB e CD e os vectores livres correspondentes $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = f(\mathrm{AB})$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = f(\mathrm{CD})$, define-se *soma* $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ com $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, pela igualdade

$$33) \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = f(\mathrm{AB} + \mathrm{CD}).$$

Desta definição resulta que a soma de vectores livres é um vector livre e que a operação gosa de tôdas as propriedades estabelecidas em [3] para a soma de translacções ou segmentos orientados.

4.ª — Sôbre a mesma função define-se a operação de multiplicação por um número real, do modo seguinte: dado o número real ρ e o vector livre $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = f(\mathrm{AB})$, chama-se *produto* de ρ por $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, e representa-se por $\rho.\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ao vector livre definido pela igualdade

$$34) \qquad \rho.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = f(\rho.\mathrm{AB}).$$

Daqui resulta que o produto dum vector livre por um número real é um vector livre e que a operação gosa de tôdas as propriedades estabelecidas em [4] para o produto de translacções por um número real.

As vantagens da introdução desta nova entidade serão apreciadas nos desenvolvimentos que vão seguir-se. Por agora, insistiremos apenas em que o vector livre é de carácter *ana-*

lítico e não *geométrico* (1); o vector não é o segmento orientado, é uma função do segmento (e dos seus equipolentes) que o determina univocamente, como êle determina o segmento, a menos duma equipolência.

Rigorosamente, deve dizer-se sempre — seja dado o vector livre $\overrightarrow{AB}$, função do segmento orientado AB; simplesmente, a esta maneira de dizer substitui-se habitualmente esta outra, mais abreviada — seja dado o vector livre $\overrightarrow{AB}$ — como se entre êle e o segmento houvesse identificação e não, apenas, correspondência.

Na prática corrente trataremos o vector livre como se êle fôsse o segmento — não há mal em o fazer, desde que a consideração permanente daquilo que os une não faça esquecer o que, no fundo, os separa — os domínios diferentes a que pertencem.

Dá-se, aqui, uma coisa parecida (não idêntica) ao que se passa com as funções: na linguagem, confunde-se correntemente a função com a sua expressão analítica, dizendo, por exemplo — seja dada a função $y = x.sen\, x$, quando deveria dizer-se — seja dada a função cuja expressão analítica é $y = x.sen\, x$. Aqui passa-se coisa análoga, tomando uma ***imagem geométrica*** pela ***entidade abstracta***; é assim que, por exemplo, a figura 4 [3] se considera como significando, de facto, a adição de vectores, quando é apenas a imagem concreta da operação abstracta adição de vectores livres.

Do mesmo modo, a direcção, o sentido, a origem, a extremidade, o módulo, a medida algébrica do segmento orientado AB, dizem-se ***direcção, sentido, origem, extremidade, módulo, medida algébrica*** do vector livre $\overrightarrow{AB} = f(AB)$; o módulo do vector livre $\overrightarrow{AB}$ representa-se por *mod* $\overrightarrow{AB}$. Fala-se, ainda, em

(1) Contràriamente às definições dadas na maior parte dos tratados. Vid., no entanto, M. Lagally — *Vektor-Rechnung* (Leipzig, 1928) pg. 3 e 4; a mesma orientação é adoptada por R. Bricard — *Le Calcul Vectoriel*, Paris, 1929, pg. 10.

equipolência de vectores como significando a equipolência dos segmentos orientados respectivos.

No Cálculo Vectorial fala-se freqüentemente, não só em vectores, mas em *grandezas vectoriais* em oposição a *grandezas escalares*.

Estas, as *escalares*, são grandezas cujos estados podem ser ordenados biunívoca e contìnuamente, pelo menos do ponto de vista teórico, ao conjunto dos números reais; os seus estados são, por conseqüência, determináveis por *números* dum certo conjunto ou *escala* numérica; tais são, por exemplo, a temperatura, o tempo, o módulo dum vector, etc. Pelo contrário, para o estudo das grandezas *vectoriais* não basta um conjunto numérico; intervém a *direcção* e o *sentido* dos segmentos orientados do espaço a cuja totalidade pode ser ordenado por correspondência biunívoca (a menos de equipolências) e contínua, o conjunto dos vectores definidos como atrás fizemos. É grandeza vectorial, por exemplo, uma velocidade, uma aceleração, etc.

Notações. Além da notação já introduzida, $\overrightarrow{AB}$, usaremos também para representar um vector, uma letra minúscula em normando **a, r, s, u**,... e, ainda, a notação de Hamilton B — A onde A é o ponto origem e B o ponto extremidade.

Da igualdade $B - A = \mathbf{a}$ tira-se a conseqüência aritmética

35) $$B = A + \mathbf{a}$$

a qual se interpreta do modo seguinte: a soma do vector livre $\mathbf{a} = f(AB)$ com o ponto A, sua origem, é o ponto B, sua extremidade.

Definições. Diz-se *vector unitário* todo o vector de módulo igual à unidade.

Diz-se *vector unitário dum eixo* o vector unitário que tem a direcção e sentido dêsse eixo.

Dois vectores livres dizem-se *opostos* quando os seus segmentos orientados o são — módulos iguais, direcções paralelas, sentidos opostos.

Dois vectores livres dizem-se *colineares* quando as suas direcções são paralelas; três vectores livres dizem-se *coplanares* quando as suas direcções são paralelas a um plano.

Chama-se *ângulo* de dois vectores livres ao ângulo, compreendido entre 0 e π, formado pelas direcções dos dois vectores, tendo em atenção os seus sentidos.

Vectores ligados a uma base e vectores fixos. É conveniente introduzir, ao lado do conceito de vector livre, ainda o de *vector ligado a uma base*. Êsse conceito de vector difere do de vector livre apenas no âmbito da equipolência do segmento orientado AB de que o vector é função. Se essa equipolência joga em todo o espaço, tem-se o vector livre; se apenas joga sôbre uma certa recta de posição fixa R), tem-se o que se chama o *vector ligado à base* R). Dêste, pode ser dada uma definição análoga à do vector livre (pg. 17) com a modificação seguinte: dados dois pontos A e B sôbre a recta R) e o correspondente segmento orientado AB, chama-se vector ligado à base R), definido por AB, a uma função dos dois pontos A e B e da recta R), satisfazendo às condições seguintes: 1.ª, essa função toma o mesmo valor para todos os segmentos orientados equipolentes a AB existentes sôbre a recta R) *e só para êsses;* o resto da definição segue nos mesmos moldes.

Como se vê, o segmento orientado AB pode apenas *deslizar* sôbre a recta R) — a sua linha de acção ou suporte; por isso a estes vectores se pode chamar *vectores deslizantes.*

Um último grau de perda de liberdade dum vector é constituído pelos chamados *vectores fixos* ou *localizados* — aqueles para os quais é fixa a origem e a extremidade.

Como se vê, estas limitações não atingem, pròpriamente, a essência da entidade vector.

Quando se disser simplesmente — vector — *entender-se-há sempre que se trata dum vector livre.*

7. — **Multiplicidade linear vectorial.** *Dimensões.* Da definição de vector e das considerações feitas no parágrafo 5, resulta imediatamente que o conjunto dos vectores do espaço formá um *sistema linear* ou, como também se diz habitualmente, uma *multiplicidade linear vectorial.*

A pregunta feita no final dêsse parágrafo transforma-se agora nesta — *¿ a quantas dimensões é essa multiplicidade?*

É a essa pregunta que vamos agora responder.

Antes, porém, de o fazer, lembraremos que, em virtude do que foi dito nesse parágrafo sôbre os sistemas lineares, se verificam as seguintes propriedades.

1.ª — *Se a multiplicidade vectorial linear é a n dimensões, e* $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots \mathbf{i}_n$ *é a sua base, então* $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \ldots \mathbf{i}_n$ *são linearmente independentes e qualquer vector* $\mathbf{u}$ *da multiplicidade se exprime neles segundo*

36) $$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \mathbf{i}_j$$

que põe em evidência as *componentes* $\lambda_j . \mathbf{i}_j$ e os *coeficientes* λ_j. Esta relação contém a chamada *decomposição* de $\mathbf{u}$ segundo os vectores da *base.*

2.ª — *Dados dois vectores*

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \mathbf{i}_j \quad e \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j . \mathbf{i}_j$$

tem-se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ *sempre que e só quando*

$$\lambda_j = \mu_j , \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

Além disso:

3.ª — 37) $$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \pm \mu_j) . \mathbf{i}_j .$$

4.ª — *Dado* $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \mathbf{i}_j$ *e o número real* ρ, *tem-se*

38) $$\rho . \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} (\rho . \lambda_j) . \mathbf{i}_j .$$

Deixamos ao leitor o cuidado de verificar a filiação destas duas últimas propriedades nas propriedades formais do parágrafo 5 (e suas correspondentes para os vectores livres). Lembraremos apenas, para o caso da diferença em 37), que ela se reduz à soma com o vector oposto do subtractivo e que êste é, afinal, igual a $(-1).\mathbf{v}$.

Pôsto isto, vamos responder à pregunta feita no comêço dêste parágrafo, considerando, sucessivamente, três casos: *colinearidade, coplanaridade, caso geral* (no espaço ordinário).

I — **Colinearidade.** *Teorema 1.º — Dados dois vectores colineares* [6] $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{i}$, *não nulo, existe um e só um número real* λ *tal que*

39) $$\mathbf{u} = \lambda . \mathbf{i}$$

e êsse número é

40) $$\lambda = \varepsilon . \frac{mod\,\mathbf{u}}{mod\,\mathbf{i}}$$

onde $\varepsilon = +1$ *se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{i}$ *têm o mesmo sentido e* $\varepsilon = -1$ *se têm sentidos contrários.*

Efectuemos, com efeito, o produto $\lambda . \mathbf{i} = \varepsilon . \frac{mod\,\mathbf{u}}{mod\,\mathbf{i}} . \mathbf{i}$ [6, 34), com referência a 4, D) e E)]. É êle um novo vector com a direcção de $\mathbf{i}$ — e portanto de $\mathbf{u}$ — com o sentido de $\mathbf{i}$ ou o contrário conforme $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ (portanto, sempre com o sentido de $\mathbf{u}$) e de módulo igual a [4, 29)] $mod(\lambda.\mathbf{i}) = |\lambda| . mod\,\mathbf{i} = \frac{mod\,\mathbf{u}}{mod\,\mathbf{i}} \cdot mod\,\mathbf{i} = mod\,\mathbf{u}$. Isto é, $\lambda \mathbf{i} = \mathbf{u}$.

O número λ é único porque de $\lambda.\mathbf{i} = \mu.\mathbf{i}$ resulta, por ser $\mathbf{i} \neq 0$, $\lambda = \mu$ [5, prop. 9)].

A igualdade 39) pode pôr-se sob a forma

39*a*) $$\lambda.\mathbf{i} - \mathbf{u} = 0$$

que mostra [5, 31)] que *os vectores colineares* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{i}$ são *linearmente dependentes.*

A recíproca é igualmente verdadeira:

Teorema 2.º — Sempre que dois vectores $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *são linearmente dependentes êles são colineares.*

Excluindo o caso de nulidade de algum dos vectores, suponhamos que entre êles se verifica a relação $\rho.\mathbf{a} + \sigma.\mathbf{b} = 0$ com ρ e σ diferentes de zero (se um fôsse nulo sê-lo-ia o outro também); desta igualdade tira-se $\mathbf{a} = -\frac{\sigma}{\rho} \cdot \mathbf{b}$ que mostra que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos (porque a multiplicação por um número real não altera a direcção).

Tudo quanto está dito pode resumir-se no enunciado seguinte:

Teorema 3.º — O sistema de todos os vectores do espaço paralelos a uma direcção dada é um sistema vectorial linear a uma dimensão.

Se $\mathbf{i}$ fôr um vector unitário, tem-se de 40),

41) $$\lambda = \varepsilon \, . \, mod\, \mathbf{u} = med\, \mathbf{u} \, ;$$

se, além disso, $\mathbf{i}$ tiver o sentido de $\mathbf{u}$, será $\lambda = mod\, \mathbf{u}$, donde

42) $$\mathbf{u} = \mathbf{i} \, . \, mod\, \mathbf{u}$$

igualdade que relaciona um vector com o vector unitário do seu eixo e com o mesmo sentido. Escrevendo, abreviadamente, u em vez de $mod\, \mathbf{u}$, tem-se

43) $$\mathbf{u} = u \, . \, \mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{u}}{u} \, .$$

II. — **Coplanaridade.** *Teorema 4.º — Dados dois vectores não nulos e não paralelos* $\mathbf{i}$ *e* $\mathbf{j}$ *e outro vector* $\mathbf{u}$ *coplanar a êles, existe sempre um e um só par de números reais* λ *e* μ*, não ambos nulos (a não ser que* $\mathbf{u} = 0$*) tais que*

44) $$\mathbf{u} = \lambda \, . \, \mathbf{i} + \mu \, . \, \mathbf{j} .$$

Suponhamos que os três vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{u}$ têm a mesma origem O, o que é sempre possível, por serem vectores livres. Tiremos (fig. 9) pela extremidade P de $\mathbf{u}$ paralelas às direcções de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$; determinam-se assim dois pontos A e B e tem-se

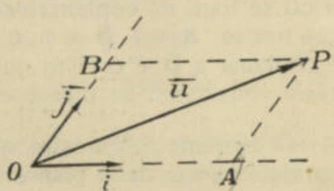


Fig. 9

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} .$$

Mas [39)] $\overrightarrow{OA} = \lambda \, . \, \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = \mu \, . \, \mathbf{j}$, o que demonstra 44).

Em face da construção, é evidente que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são únicos e, portanto, únicos λ e μ. A mesma conclusão se chega por via analítica: dados λ' e μ' tais que $\mathbf{u} = \lambda' \, . \, \mathbf{i} + \mu' \, . \, \mathbf{j}$, tem-se $\lambda.\mathbf{i}+\mu.\mathbf{j}=\lambda'.\mathbf{i}+\mu'.\mathbf{j}$ donde $(\lambda-\lambda').\mathbf{i}+(\mu-\mu').\mathbf{j}=0$ e esta igualdade exige que sejam $\lambda-\lambda'=0$, $\mu-\mu'=0$ pois, caso contrário, pelo teor. 2.º, **i** e **j** seriam paralelos, contra a hipótese.

A igualdade 44) pode ser posta sob a forma

44 *a*) $\lambda.\mathbf{i}+\mu.\mathbf{j}-\mathbf{u}=0$

a qual nos mostra [5, 31)] que *os três vectores coplanares* **i, j** *e* **u** *são linearmente dependentes.* E como o são, *a fortiori,* se dois dêles forem paralelos [basta pôr o coeficiente do terceiro igual a zero e verifica-se então uma relação da forma 39 *a*)], tem-se:

Teorema 5.º — Três vectores coplanares quaisquer são linearmente dependentes.

A recíproca é igualmente verdadeira:

Teorema 6.º — Sempre que três vectores **a, b** *e* **c** *são linearmente dependentes, êles são coplanares.*

Suponhamos, com efeito, que há entre **a, b** e **c,** não nulos, (se algum dêles o fôsse ficava implìcitamente estabelecida a coplanaridade) uma relação da forma $\lambda.\mathbf{a}+\mu.\mathbf{b}+\nu.\mathbf{c}=0$. Se algum dos coeficientes é nulo, está-se no caso do teorema 2.º e cai-se logo na coplanaridade; afastemos êsse caso. Da relação tira-se $\mathbf{a}=\rho.\mathbf{b}+\sigma.\mathbf{c}$ que mostra imediatamente que **a** é coplanar a **b** e **c** visto que as multiplicações por números reais conservam as direcções e a adição conserva o plano.

O teorema 5.º mostra que a multiplicidade dos vectores paralelos a um dado plano não pode ter mais de duas dimensões, mas como, por outro lado, é sempre possível escolher no plano dois vectores **i** e **j** não paralelos, e portanto linearmente independentes, tem-se o

Teorema 7.º — O sistema de todos os vectores do espaço paralelos a um dado plano é um sistema linear vectorial a duas dimensões.

III. — **Caso geral.** Comecemos por notar que a multiplicidade dos vectores do espaço tem um número de dimensões maior que 2. É o que imediatamente resulta do teorema 6.º;

efectivamente, *dados três vectores não nulos nem coplanares,* **a**, **b**, **c**, *êles são, necessàriamente, linearmente independentes,* pois, se o não fôssem, seriam coplanares como lá se demonstrou.

Vamos agóra provar que o número de dimensões da multiplicidade não pode ser maior que 3. Demonstraremos para isso o

Teorema 8.º — Quatro vectores quaisquer do espaço são sempre linearmente dependentes.

Ponhamos de parte os casos simples em que haja paralelismo de dois vectores ou coplanaridade de três quaisquer de entre êles — em qualquer dêstes casos há dependência linear dos quatro, com anulamento de coeficientes convenientes — para nos ocuparmos do caso mais geral: haver quatro vectores não nulos **i**, **j**, **k**, **u**, sem paralelismo nem coplanaridade entre quaisquer grupos dêles. Pois bem, vamos demonstrar que *existe um e um só terno de números reais* λ, μ, ν, *tais que*

45) $$\mathbf{u} = \lambda . \mathbf{i} + \mu . \mathbf{j} + \nu . \mathbf{k} .$$

Seja O a origem comum dos quatro vectores, o que é sempre possível, e tiremos por P, extremidade de **u**, uma paralela a **k** (fig. 10); seja B o ponto em que ela encontra o plano definido por **i** e **j**. Tem-se $\mathbf{u} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$; mas [39)] $\overrightarrow{BP} = \nu . \mathbf{k}$ e [44)] $\overrightarrow{OB} = \lambda . \mathbf{i} + \mu . \mathbf{j}$, logo verifica-se 45).

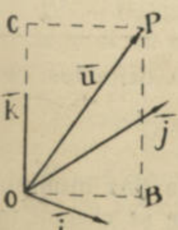


Fig. 10

A demonstração de que λ, μ, ν são únicos faz-se duma maneira inteiramente análoga àquela por que se procedeu no teorema 4.º. A relação 45), posta sob a forma

45 *a*) $$\lambda . \mathbf{i} + \mu . \mathbf{j} + \nu . \mathbf{k} - \mathbf{u} = 0,$$

mostra que os quatro vectores são linearmente dependentes, com o que fica demonstrado o teorema. Dêle, e das considerações feitas imediatamente antes, resulta finalmente que

Teorema 9.º — A multiplicidade linear vectorial de todos os vectores do espaço ordinário é um sistema linear a três dimensões.

Decomposição. É claro que a relação 45) é absolutamente geral; vale qualquer que seja a posição relativa de **u** para com os vectores **i**, **j** e **k** — se houver particularidades nessa posição, elas traduzir-se-hão no anulamento de coeficientes.

Essa relação traduz a *decomposição* dum vector qualquer **u** segundo a *base* **i**, **j** e **k**; para esta podem tomar-se três vectores quaisquer desde que não sejam nem nulos nem coplanares.

Representaremos, para obter maior simetria nas fórmulas, os vectores da base por $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; a *decomposição* de **u** escreve-se então

46) $$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j . \mathbf{i}_j .$$

Se $\mathbf{i}_j$ são vectores unitários dos seus eixos, os *coeficientes* λ_j das *componentes* $\lambda_j . \mathbf{i}_j$ são as *medidas algébricas* [41)] dessas componentes.

Quando o vector **u** fôr qualquer dos vectores $\mathbf{i}_j$ da base, a fórmula geral 46) toma o aspecto

47) $$\mathbf{i}_j = \sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} . \mathbf{i}_k ,$$

onde os δ_{jk} — *símbolos de Kronecker* — são definidos por

48) $$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \leftarrow j \neq k \\ 1 & \leftarrow j = k . \end{cases}$$

8 — **Possibilidade duma teoria analítica das multiplicidades vectoriais** (1). As conclusões a que se chegou no parágrafo anterior mostram que, uma vez escolhida uma base no espaço ordinário, todo o vector do espaço fica unìvocamente determinado por três números reais λ_j, $j = 1, 2, 3$.

(1) Para a compreensão da matéria dêste parágrafo, cuja leitura não é indispensável para seguir os desenvolvimentos subseqüentes, o leitor deve estar familiarizado com os elementos da teoria das Matrizes e das Formas Lineares. Ver, por ex., *Lições*, Vol. 1.º, **3**, 13 e 14 e 29 a 31, **4**, 6. Para outros desenvolvimentos sôbre êste assunto, ver, por ex., J. Wedderburn, *Lectures on Matrices*, New-York, 1934.

Isto sugere a possibilidade de se estabelecer uma teoria geral, de carácter analítico, das multiplicidades vectoriais nos espaços *n*-dimensionais. Vamos indicar, brevemente, como essa teoria se pode desenvolver.

I. — Define-se *vector* num espaço euclideano *n*-dimensional como o conjunto de *n* números reais $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, por esta ordem; usa-se a notação $\mathbf{u} = (\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)$.

Diz-se *nulo* o vector em que $\rho_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots n$ e escreve-se $(0, 0, \ldots 0) = 0$.

II. — Dados dois vectores $\mathbf{u} = (\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)$ e $\mathbf{v} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ diz-se que são *iguais*, e escreve-se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, quando existem as relações $\rho_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Verifica-se que esta definição satisfaz às condições de ser reflexiva, simétrica e transitiva.

III. — Define-se *soma* dos dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e escreve-se $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, pela igualdade $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\rho_1 + \sigma_1, \rho_2 + \sigma_2, \ldots \rho_n + \sigma_n)$.

Prova-se que esta operação goza das propriedades da adição ordinária — **5**, prop. 1) a 5) (mudando a palavra *translacção* em *vector).*

IV. — Define-se *produto* de $\mathbf{u}$ pelo número real ξ, e escreve-se $\xi . \mathbf{u}$ ou $\mathbf{u} . \xi$, pela igualdade

$$\xi . \mathbf{u} = \mathbf{u} . \xi = (\xi . \rho_1, \xi . \rho_2, \ldots \xi . \rho_n).$$

Demonstra-se que esta operação goza das propriedades habituais — **5**, prop. 6) a 12).

V. — Define-se *sistema linear* ou *multiplicidade linear* como foi feito no parágrafo **5**. Da definição resulta, por virtude de III e IV, que *a totalidade dos vectores do espaço n-dimensional é uma multiplicidade linear.*

VI. — De III e IV resulta ainda que todo o vector $\mathbf{u}$ da multiplicidade se pode pôr, duma única maneira, sob a forma
$\mathbf{u} = \rho_1 . (1, 0, \ldots 0) + \rho_2 . (0, 1, \ldots 0) + \ldots + \rho_n . (0, 0, \ldots 1)$
ou, abreviadamente, $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \rho_j . \mathbf{e}_j$, onde os vectores $\mathbf{e}_j$ são definidos pela igualdade $\mathbf{e}_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \ldots \delta_{jn})$ e os δ_{jk} são dados por **7**, 48).

Os vectores da multiplicidade aparecem, assim, como *formas lineares* nos $\mathbf{e}_j$. Estes, por sua vez, podem pôr-se também sob a forma anterior, visto que

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} . \mathbf{e}_k .$$

VII. — Define-se *combinação linear* de vectores, do modo seguinte: dados os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$, diz-se que $\mathbf{u}$ é uma combinação linear dos restantes, quando existem m números reais λ_i, $i = 1, 2, \ldots m$, tais que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . \mathbf{u}_i$.

VIII. — Define-se *dependência* e *independência linear* como habitualmente: os m vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ dizem-se linearmente dependentes quando existirem m números reais λ_i, $i, = 1, 2, \ldots m$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i . \mathbf{u}_i = 0$.

Se esta relação só fôr possível quando todos os λ_i forem nulos, os m vectores dizem-se *linearmente independentes*.

IX. — Da teoria das formas lineares resulta imediatamente que *a condição necessária e suficiente para que de entre os m vectores*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \rho_{11} . \mathbf{e}_1 + \rho_{12} . \mathbf{e}_2 + \ldots + \rho_{1n} . \mathbf{e}_n \\ \ldots \\ \mathbf{u}_j = \rho_{j1} . \mathbf{e}_1 + \rho_{j2} . \mathbf{e}_2 + \ldots + \rho_{jn} . \mathbf{e}_n \\ \ldots \\ \mathbf{u}_m = \rho_{m1} . \mathbf{e}_1 + \rho_{m2} . \mathbf{e}_2 + \ldots + \rho_{mn} . \mathbf{e}_n \end{array}\right.$$

haja r e não mais de r linearmente independentes, é que a característica da matriz

$$((\rho_{jk})) = \left\| \begin{array}{lll} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots \rho_{1n} \\ \cdots & & \\ \rho_{j1} & \rho_{j2} & \cdots \rho_{jn} \\ \cdots & & \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots \rho_{mn} \end{array} \right\|$$

seja igual a r.

Os m-r vectores cujos coeficientes não figuram no determinante principal são combinações lineares dos outros.

X. — Conclui-se daqui que *os n vectores* $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots n$, *são linearmente independentes*, visto que a sua matriz

$$((\delta_{jk})) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{matrix} \right\|$$

é a *matriz identidade* e tem, portanto, característica n.

Aos vectores $\mathbf{e}_j$ dá-se o nome de *vectores-unidade* e ao seu conjunto chama-se *base* da multiplicidade.

De VI resulta que todo o vector da multiplicidade se exprime, duma só maneira, nos vectores da base.

XI. — *São linearmente dependentes quaisquer n + 1 vectores da multiplicidade.* Efectivamente a característica da matriz

$$\left\| \begin{matrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \ldots \rho_{1n} \\ \ldots & & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \ldots \rho_{nn} \\ \rho_{n+1,1} & \rho_{n+1,2} & \ldots \rho_{n+1,n} \end{matrix} \right\|$$

não pode ser maior que n.

XII. — Define-se *ordem* ou *número de dimensões* da multiplicidade do modo seguinte: *diz-se que a multiplicidade é de ordem r, ou tem r dimensões, quando há nela r vectores linearmente independentes e r + 1 quaisquer são linearmente dependentes.*

De X e XI conclui-se imediatamente que *a multiplicidade total dos vectores do espaço n-dimensional é de ordem n.*

Com isto, ficam estabelecidas as propriedades até aqui estudadas para os vectores ordinários, e por via meramente analítica. O leitor notará a analogia desta teoria com a dos *números complexos a n unidades* [*Lições*, Vol. 1.°, **2, 27**] o que vem confirmar a afirmação atrás feita [**6**] de que um vector é uma entidade analítica e não geométrica.

9. — **Coordenadas cartesianas.** É sabido, dos elementos da Geometria Analítica, como a posição dum ponto no espaço pode ser fixada com a ajuda do método das coordenadas cartesianas.

Toma-se, como sistema de referência, o conjunto de três eixos não coplanares Ox, Oy, Oz, que, por simplicidade, se supõem tri-ortogonais; o seu ponto de encontro O denomina-se *origem das coordenadas* e os eixos chamam-se *eixos coordenados*.

O sistema diz-se de *disposição positiva* ou *dextrorsum* se o considerarmos orientado do modo seguinte (fig. 11): um observador colocado ao longo de Oz com os pés em O e a cabeça para o sentido positivo de Oz e virado para o interior do triedro, deixa o semi-eixo positivo Ox à direita e o semi-eixo positivo Oy à esquerda.

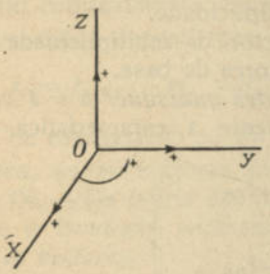


Fig. 11

No plano Oxy toma-se, como *sentido positivo das rotações* aquele pelo qual a rotação de menor amplitude $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ que leva o semi-eixo positivo Ox à coïncidência com o semi-eixo positivo Oy se faz no sentido directo (contrário ao sentido do movimento dos ponteiros dum relógio) — é o sentido indicado pela seta curva na fig. 11.

Dos seis sistemas determinados pelas seis permutações das letras x, y, z, três dêles — os que correspondem a permutações pares — são orientados como o da fig. 11, cada um dêles é um sistema dextrorsum; os outros três — os que correspondem a permutações ímpares — são orientados de modo que o observador, nas condições acima indicadas, vê à esquerda Ox e à direita Oy — cada um dêles diz-se de *disposição negativa* ou *sinistrorsum*.

Na fig. 12, os três sistemas superiores são de disposição positiva, e os três inferiores de disposição negativa. Como se vê, dentro de cada um dos dois grupos, os sistemas derivam uns dos outros por permutações circulares das letras, e cada um dos negativos deriva de um positivo pela troca de dois eixos. Pode, é claro, fazer-se coïncidir um negativo com o correspondente positivo desde que se lhe troque o sentido de um eixo (1).

Pôsto isto, a posição de qualquer ponto M do espaço é

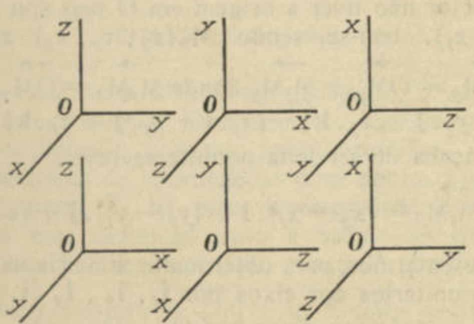


Fig. 12

fixada unìvocamente por três números reais — as suas três *coordenadas*, $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$, $\overline{OC} = z$ — obtidos pela construção da fig. 13 e que é, exactamente, a mesma do parágrafo 7, III, para a decomposição do vector $\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}$. Tem-se portanto, sendo **i**, **j**, **k** os vectores unitários dos eixos, como estão indicados na figura, e visto que os λ, μ, ν de 7, 45) são, respectivamente, iguais a $med\, \overrightarrow{OA} = x$, $med\, \overrightarrow{OB} = y$, $med\, \overrightarrow{OC} = z$,

49) $\quad M(x, y, z) - O = \mathbf{u} = x \,.\, \mathbf{i} + y \,.\, \mathbf{j} + z \,.\, \mathbf{k}$

que mostra que os *coeficientes* da *decomposição* de **u** segundo os eixos são precisamente as *coordenadas* da sua *extremidade*; por isso se dá, também, a x, y, z o nome de *coordenadas* do vector.

---

(1) Tudo o que está dito a respeito da orientação dos sistemas tri-ortogonais se mantém, *ipsis verbis*, se êles o não são.

Como se vê, 49) é um caso particular de *7*, 45) e, portanto, de *7*, 36) e daí resulta que são aplicáveis à soma de vectores e ao produto dêles por um número real as regras ordinárias da Álgebra, por virtude de *7*, 37) e 38); e que a igualdade de dois vectores exige a igualdade das suas coordenadas homónimas e reciprocamente.

Se o vector não tiver a origem em O mas sim num ponto $M_1(x_1, y_1, z_1)$, tem-se, sendo $M_2(x_2, y_2, z_2)$ a sua extremidade, $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$ donde $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 . \mathbf{i} + y_2 . \mathbf{j} + z_2 . \mathbf{k}) - (x_1 . \mathbf{i} + y_1 . \mathbf{j} + z_1 . \mathbf{k})$, e a observação que acaba de ser feita permite escrever

$$50) \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) . \mathbf{i} + (y_2 - y_1) . \mathbf{j} + (z_2 - z_1) . \mathbf{k} .$$

Se representarmos, para obter maior simetria nas fórmulas, os vectores unitários dos eixos por $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ ($\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{i}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{i}_3 = \mathbf{k}$), e os próprios eixos por Ox_1, Ox_2, Ox_3, a decomposição 49) toma o aspecto

$$51) \qquad M(x_1, x_2, x_3) - O = \sum_{k=1}^{3} x_k . \mathbf{i}_k .$$

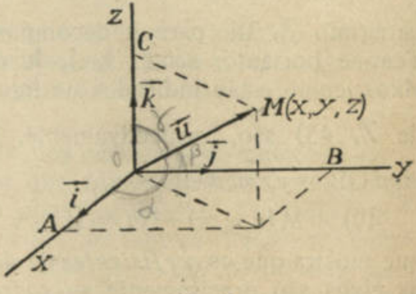


Fig. 15

Como as coordenadas do ponto M são, afinal, as medidas algébricas das projecções de OM sôbre os eixos coordenados, *se* $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM}$ *é um vector unitário*, essas coordenadas são os cosenos dos ângulos que o vector $\overrightarrow{OM}$ faz com cada um dos eixos, ou, como se diz habitualmente, os seus *cosenos directores*.

Se forem α_1, α_2, α_3 os ângulos de $\overrightarrow{OM}$ respectivamente com Ox_1, Ox_2, Ox_3, ter-se-há $x_k = \cos \alpha_k$, logo

$$52)\qquad \overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^{3} \cos\alpha_k . \mathbf{i}_k \quad \leftarrow mod\, \overrightarrow{OM} = 1 .$$

Sempre que, daqui em diante, se não fizer a indicação dos valores que deve tomar o índice do somatório, entender-se-há que êsses valores são *1, 2, 3,* de modo que, por exemplo, 52) se escreverá simplesmente

$$\overrightarrow{OM} = \sum_k \cos\alpha_k . \mathbf{i}_k .$$

Tudo quanto ficou dito neste parágrafo, ***à excepção do que se refere aos cosenos directores,*** se mantém se os eixos não são tri-ortogonais, bastando apenas modificar convenientemente a definição de coordenadas dum ponto. A construção feita no parágrafo 7, III para decomposição do vector **u** indica como essa definição nova é dada — as coordenadas cartesianas, não rectangulares, do ponto M são os números λ, μ, ν, da decomposição de $\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}$. É claro que em virtude desta definição as coordenadas deixam de ser as medidas algébricas das projecções de **u** sôbre os eixos e por isso as coordenadas do vector unitário não são iguais aos cosenos directores.

10. — **Aplicações.** O cálculo vectorial é susceptível de numerosas e importantes aplicações à Geometria e à Física. Nos capítulos seguintes serão tratadas algumas; mas podem desde já resolver-se algumas questões interessantes.

1.ª — ***Condição de paralelismo de dois vectores expressa nas suas coordenadas.*** Sejam os dois vectores **u** e **v**; como se sabe [7, 39)], a condição de paralelismo dêles é $\mathbf{v} = \lambda . \mathbf{u}$; vamos exprimir esta condição nas *coordenadas* dos dois vectores.

Sejam os três eixos coordenados Ox_1, Ox_2, Ox_3 de vectores unitários $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ e $\mathbf{u} = \sum_k l_k . \mathbf{i}_k$, $\mathbf{v} = \sum_k m_k . \mathbf{i}_k$ as decomposições dos dois vectores. De $\mathbf{v} = \lambda . \mathbf{u}$ resulta $\sum_k m_k . \mathbf{i}_k = \lambda . \sum_k l_k . \mathbf{i}_k = \sum_k (\lambda . l_k) . \mathbf{i}_k$ donde

$$53)\qquad m_k = \lambda . l_k \qquad k = 1, 2, 3 \qquad \text{isto é,}$$

53 *a*) $$\frac{m_1}{l_1}=\frac{m_2}{l_2}=\frac{m_3}{l_3}$$

que nos diz que *a condição necessária e suficiente de paralelismo de dois vectores, dados em decomposição cartesiana, é a proporcionalidade das suas coordenadas.* O coeficiente de proporcionalidade λ é [7, 40)]

54) $$\lambda=\varepsilon\cdot\frac{mod\,\mathbf{v}}{mod\,\mathbf{u}}.$$

2.ª — *Condição de coplanaridade de três vectores expressa nas suas coordenadas.* Sejam os três vectores

$$\mathbf{u}=\sum_k l_k.\mathbf{i}_k,\qquad \mathbf{v}=\sum_k m_k.\mathbf{i}_k,\qquad \mathbf{w}=\sum_k n_k.\mathbf{i}_k.$$

A condição de coplanaridade dêles é [7, 44)] no caso geral (não anulamento nem paralelismo), $\mathbf{w}=\lambda.\mathbf{u}+\mu.\mathbf{v}$ com λ e μ reais e únicos. É, por conseqüência,

$$\sum_k n_k.\mathbf{i}_k=\lambda.\sum_k l_k.\mathbf{i}_k+\mu.\sum_k m_k.\mathbf{i}_k=\sum_k(\lambda.l_k+\mu.m_k).\mathbf{i}_k$$

donde

55) $$n_k=\lambda.l_k+\mu.m_k,\qquad k=1,2,3.$$

3.ª — *Equação da recta que passa por um ponto dado e é paralela a um vector dado.* Seja M um ponto do espaço e $\mathbf{u}$ um vector livre; a recta definida por M e $\mathbf{u}$ é conhecida desde que seja conhecido o *ponto geral* ou *ponto corrente* dela; a sua equação consistirá, portanto, no estabelecimento da condição necessária e suficiente a que deve satisfazer o ponto geral P para que esteja sôbre a recta. Ora a recta R) é um *logar geométrico* — o de todos aqueles pontos tais que a direcção definida por qualquer dêles e por M seja a direcção de $\mathbf{u}$. A condição necessária e suficiente é portanto que $\overrightarrow{MP}$ e $\mathbf{u}$ sejam colineares, isto é, que haja um número real λ não nulo, único [7, 39)] tal que

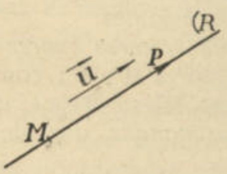


Fig. 14

56) $$\overrightarrow{MP}=\lambda.\mathbf{u}.$$

É esta a *equação vectorial* da recta; como se vê, ela contém o parâmetro $\lambda = \varepsilon \cdot \dfrac{mod\,\overrightarrow{MP}}{mod\,\mathbf{u}}$ [54)] que, variando de $-\infty$ a $+\infty$, permite ao ponto P descrever a recta, ilimitada nos dois sentidos.

É fácil deduzir o aspecto cartesiano desta equação. Sejam (α_k) e (x_k), $k = 1, 2, 3$, respectivamente, as coordenadas cartesianas dos pontos M e P e seja $\mathbf{u} = \sum\limits_k l_k \cdot \mathbf{i}_k$. De 9, 50) resulta $\overrightarrow{MP} = \sum\limits_k (x_k - \alpha_k) \cdot \mathbf{i}_k$, logo, deve ser [53)]

$$57) \qquad x_k - \alpha_k = \lambda \cdot l_k \qquad k = 1, 2, 3$$

ou seja, substituindo x_1, x_2, x_3 pelos símbolos habituais x, y, z,

$$57\,a) \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 + \lambda \cdot l_1 \\ y = \alpha_2 + \lambda \cdot l_2 \\ z = \alpha_3 + \lambda \cdot l_3 . \end{cases}$$

São as chamadas *equações paramétricas* da recta R).

A 57) pode dar-se a forma $\dfrac{x_k - \alpha_k}{l_k} = \lambda$, $k = 1, 2, 3$, isto é,

$$58) \qquad \frac{x - \alpha_1}{l_1} = \frac{y - \alpha_2}{l_2} = \frac{z - \alpha_3}{l_3}$$

que são as chamadas *equações normais* da mesma recta; os três números l_1, l_2, l_3, definidos a menos duma constante multiplicativa (porque as coordenadas de qualquer outro vector paralelo a $\mathbf{u}$ determinam igualmente a direcção da recta) denominam-se *parâmetros directores* da recta.

Se o vector $\mathbf{u}$ fôr unitário, tem-se, representando por $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ os ângulos que êle forma com os eixos, $l_k = \cos\theta_k$ [9, 52)] e, por conseqüência, as equações paramétricas da recta são

$$59) \qquad x_k - \alpha_k = \lambda \cdot \cos\theta_k, \qquad k = 1, 2, 3 \qquad \text{onde}$$

$$60) \qquad \lambda = \varepsilon \cdot mod\,\overrightarrow{MP}$$

e as equações normais são

$$61) \qquad \frac{x-\alpha_1}{\cos\theta_1}=\frac{y-\alpha_2}{\cos\theta_2}=\frac{z-\alpha_3}{\cos\theta_3}.$$

Aos $\cos\theta_k$ dá-se o nome de *cosenos directores* da recta.

4.ª — *Equação do plano que passa por um ponto dado e é paralelo a dois vectores dados.* A dedução faz-se por um raciocínio inteiramente análogo ao anterior.

Seja M o ponto, **u** e **v** os vectores não paralelos dados. A condição necessária e suficiente para que o ponto variável P esteja sôbre o plano é que os vectores $\overrightarrow{MP}$, **u** e **v** sejam coplanares, isto é, que seja [7, 44)].

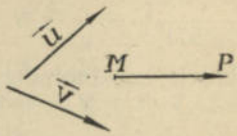


Fig. 15

$$62) \qquad \overrightarrow{MP}=\lambda\,.\,\mathbf{u}+\mu\,.\,\mathbf{v}$$

com λ e μ reais e únicos; è esta, por conseqüência, a equação vectorial pedida. Como se vê, figuram nela *dois* parâmetros λ e μ que, pela sua variação de $-\infty$ a $+\infty$ permitem ao ponto P descrever o plano inteiro. O aspecto cartesiano de 62) é também de dedução simples. Sejam (α_k) e (x_k) $k=1,2,3$, respectivamente, as coordenadas cartesianas de M e P e sejam $\mathbf{u}=\sum_k l_k\,.\,\mathbf{i}_k$, $\mathbf{v}=\sum_k m_k\,.\,\mathbf{i}_k$ as decomposições de **u** e **v**; como [9, 50)] $\overrightarrow{MP}=\sum_k(x_k-\alpha_k)\,.\,\mathbf{i}_k$, tem-se, em virtude de 55),

$$63) \qquad x_k-\alpha_k=\lambda\,.\,l_k+\mu\,.\,m_k, \qquad k=1,2,3.$$

Estas equações que se escrevem, substituindo agora x_1, x_2, x_3 pelos símbolos habituais das variáveis, x, y, z,

$$63\,a) \qquad \begin{cases} x-\alpha_1=\lambda\,.\,l_1+\mu\,.\,m_1\\ y-\alpha_2=\lambda\,.\,l_2+\mu\,.\,m_2\\ z-\alpha_3=\lambda\,.\,l_3+\mu\,.\,m_3\end{cases}$$

são as chamadas *equações paramétricas* do plano.

É de notar, da comparação de 63 *a*) com 62), como de 57 *a*) com 56), o maior poder de condensação e simplicidade na escrita das fórmulas que o cálculo vectorial apresenta, sôbre o método cartesiano.

De 63) deduz-se a *equação cartesiana do plano*, para o que basta *eliminar* λ e μ, isto é, estabelecer as condições necessárias e suficientes para que o sistema 63), considerado em relação a λ e μ como incógnitas, seja compatível. Como **u** e **v**, por hipótese, não são paralelos (se o fôssem, o plano seria indeterminado) o determinante principal é de 2.ª ordem e há uma só equação de condição — anulamento do característico —

$$64)\qquad \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & l_1 & m_1 \\ y-\alpha_2 & l_2 & m_2 \\ z-\alpha_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

que, desenvolvendo o determinante em relação aos elementos da primeira coluna, toma o aspecto

$$64\,a)\qquad a_1.(x-\alpha_1)+a_2.(y-\alpha_2)+a_3.(z-\alpha_3)=0\,.$$

Adiante [12, III] será vista a significação geométrica dos coeficientes a_1, a_2, a_3 desta equação.

5.ª — *Equação do plano que passa por três pontos não alinhados.* O problema reduz-se imediatamente ao anterior.

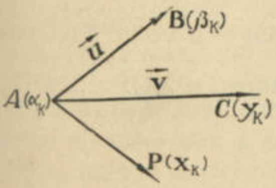


Fig. 16

Sejam A, B, C os três pontos dados, de coordenadas respectivamente $(\alpha_k), (\beta_k), (\gamma_k)$, $k=1,2,3$. Fazendo $B-A=\mathbf{u}$, $C-A=\mathbf{v}$ o problema reduz-se ao anterior.

Tem-se $\mathbf{u}=\sum_k (\beta_k-\alpha_k).\mathbf{i}_k$. $\mathbf{v}=\sum_k(\gamma_k-\alpha_k).\mathbf{i}_k$ e as equações 63) tomam o aspecto

$$65)\qquad x_k-\alpha_k=\lambda.(\beta_k-\alpha_k)+\mu.(\gamma_k-\alpha_k),\quad k=1,2,3\,.$$

A equação 64) escreve-se agora

$$66)\qquad \begin{vmatrix} x_1-\alpha_1 & \beta_1-\alpha_1 & \gamma_1-\alpha_1 \\ x_2-\alpha_2 & \beta_2-\alpha_2 & \gamma_2-\alpha_2 \\ x_3-\alpha_3 & \beta_3-\alpha_3 & \gamma_3-\alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou, o que é o mesmo,

$$66\,a)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ x_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Façamos agora uma aplicação à Física.

6.ª — *Baricentro dum sistema de pontos materiais de massa total não nula.* Sejam os *pontos* do espaço $P_1, P_2 \ldots P_n$ aos quais se atribuem, ou fazem corresponder, as *massas* respectivamente $m_1, m_2, \ldots m_n$; supondo que $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$, e dado um ponto arbitrário O do espaço, construamos o vector *fixo* $\overrightarrow{OG}$ definido pela igualdade, onde $\overrightarrow{OP_i}$ são também vectores fixos,

$$67)\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i . \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OG} . \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

É claro que, uma vez escolhido O, esta igualdade determina unìvocamente $\overrightarrow{OG}$ (e portanto G) — o vector $\overrightarrow{OG}$ vem expresso em combinação linear dos vectores $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots \overrightarrow{OP_n}$, com coeficientes $\dfrac{m_1}{\Sigma m_i}, \ldots \dfrac{m_n}{\Sigma m_i}$.

Vamos demonstrar que *o ponto* $\overrightarrow{G}$ *não depende do ponto* O.

Seja, com efeito, outro ponto O' do espaço e seja G' o novo ponto definido a partir de 67), isto é, seja

$\Sigma m_i . \overrightarrow{O'P_i} = \overrightarrow{O'G'} . \Sigma m_i$. Como se tem, quaisquer que sejam os pontos, $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_i} = \overrightarrow{OP_i}$, vem, substituindo na igualdade anterior, $\Sigma m_i . (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{O'G'} . \Sigma m_i$, donde, desenvolvendo o somatório do primeiro membro,

$\Sigma m_i . \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OO'} . \Sigma m_i = \overrightarrow{O'G'} . \Sigma m_i$, donde, por 67),

$(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OO'}) . \Sigma m_i = \overrightarrow{O'G'} . \Sigma m_i$, donde, ainda, por ser $\Sigma m_i \neq 0$, $\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OO'}$. Mas, por outro lado, é sempre verdade que $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G} = \overrightarrow{OG}$, donde $\overrightarrow{O'G} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OO'}$, logo é $\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{O'G}$ o que prova que o ponto G' coïncide com G.

Ao ponto G, definido e determinado por 67), chama-se *baricentro* ou *centro de gravidade* do sistema de pontos dados.

Se se tomar para ponto O o próprio baricentro G, a igualdade 67) toma a forma

$$68) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i . \overrightarrow{GP_i} = 0$$

da qual se tiram algumas conclusões interessantes. Vejamos duas.

a) *O sistema é constituído por dois pontos.* 68) reduz-se a $m_1 . \overrightarrow{GP_1} + m_2 . \overrightarrow{GP_2} = 0$, donde (se $m_2 \neq 0$) $\overrightarrow{GP_2} = \lambda . \overrightarrow{GP_1}$ que mostra [7, 39)] que os dois vectores $\overrightarrow{GP_1}$ e $\overrightarrow{GP_2}$ são paralelos e, como têm a mesma origem G, estão sôbre a mesma recta, logo o *baricentro do sistema está sôbre a recta definida por* P_1 e P_2.

Se as massas forem ambas iguais à unidade, é $\overrightarrow{GP_2} = -\overrightarrow{GP_1}$, isto é, o baricentro está no meio do segmento $\overline{P_1 P_2}$.

b) *O sistema é constituído por três pontos não alinhados.* Tem-se, de 68), $m_1 . \overrightarrow{GP_1} + m_2 . \overrightarrow{GP_2} + m_3 . \overrightarrow{GP_3} = 0$ donde (se $m_3 \neq 0$) $\overrightarrow{GP_3} = \lambda . \overrightarrow{GP_1} + \mu . \overrightarrow{GP_2}$ que mostra [7, 44)] que G *está no plano definido por* P_1, P_2, P_3.

Se as massas são iguais à unidade, tem-se $\overrightarrow{GP_3} = -(\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2})$ e daqui conclui-se que G *está sôbre a mediana do triângulo de vértices* P_1, P_2, P_3 *a dois terços a contar do vértice.*

Efectivamente (fig. 17), tirando por P_1 o vector fixo $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{GP_2}$, vê-se que $\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} = \overrightarrow{GP}$ e, como P_1, P, P_2, G, definem um paralelogramo, $\overline{GP}$ corta $\overline{P_1P_2}$ ao meio em H e $\overrightarrow{GP} = 2 . \overrightarrow{GH}$. Por outro lado, como $\overrightarrow{GP_3} = -(\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2})$ tem-se $\overrightarrow{GP_3} = -2 . \overrightarrow{GH}$, quere dizer, os pontos G, H, P_3 estão alinhados e G está a dois terços entre P_3 e H.

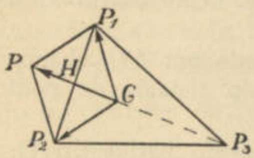


Fig. 17

O mesmo raciocínio se faz para as outras medianas, de modo que fica estabelecido que o baricentro está sôbre cada uma das medianas a dois terços a contar do vértice correspondente e que, por conseqüência, estas, as medianas, se cortam num ponto — o baricentro do triângulo.

II. — PRODUTOS E OPERADORES

11. — Produto vectorial ou externo.

Definição. Dados dois vectores livres $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, não nulos e não paralelos, chama-se *produto vectorial* ou *produto externo* dêles, e representa-se por $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, que se lê: $\mathbf{u}$ externo $\mathbf{v}$, ao vector livre $\mathbf{w}$ que satisfaz às seguintes condições:

a) a *direcção* de $\mathbf{w}$ é perpendicular ao plano definido pelas direcções de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;

b) o *sentido* de $\mathbf{w}$ é tal que os três vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, por esta ordem, formem um triedro *dextrorsum*, isto é, de disposição análoga à do triedro definido pelos vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

c) o *módulo* de $\mathbf{w}$ é definido pela igualdade

69) $$mod\,\mathbf{w} = mod(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = mod\,\mathbf{u} \,.\, mod\,\mathbf{v} \,.\, sen\,\theta$$

sendo θ o *ângulo* [6] dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, $\theta = ang(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$.

Como se vê, o módulo é definido como igual ao valor absoluto da *área do paralelogramo* determinado pelos dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

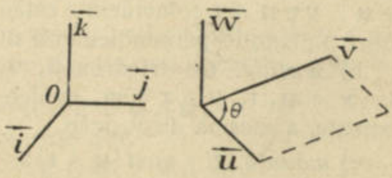


Fig. 18

Se algum dos dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é nulo, ou se êles são paralelos, põe-se, por definição,

70) $$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0 .$$

Propriedades. O produto vectorial goza de algumas propriedades que o assemelham ao produto ordinário mas possui outras que dêle o diferenciam nìtidamente. Comecemos pelas primeiras.

1.ª — *Sendo ρ um número real qualquer, tem-se*

71) $$\rho \,.\, (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\rho \,.\, \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\rho \,.\, \mathbf{v})$$

Efectivamente:

a) a multiplicação por ρ não altera as direcções;

b) se é $\rho > 0$, os sentidos mantêm-se; se é $\rho < 0$, a alteração de sentido produzida em **u**, ou em **v**, coïncide com a produzida em $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$;

c) é
$$\begin{aligned} mod\,|\rho\,.\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})| &= |\rho|\,.\,mod\,\mathbf{u}\,.\,mod\,\mathbf{v}\,.\,sen\,\theta \\ &= (|\rho|\,.\,mod\,\mathbf{u})\,.\,mod\,\mathbf{v}\,.\,sen\,\theta \\ &= mod\,\mathbf{u}\,.\,(|\rho|\,.\,mod\,\mathbf{v})\,.\,sen\,\theta\,. \end{aligned}$$

2.ª — *O produto vectorial é distributivo em relação à soma*, isto é,

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\,. \tag{72}$$

Comecemos por demonstrar que, *dados os vectores* **u** *e* **v**, *se chamarmos* **r** *ao vector projecção do vector* **v** *sôbre um plano perpendicular a* **u**, *se tem*

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{r}\,.$$

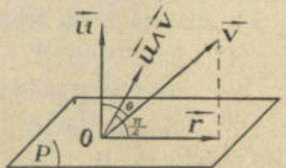


Fig. 19

Com efeito (fig. 19): a) *direcção*. Como **r** está no plano definido por **u** e **v**, as direcções de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}$ coïncidem e estão sôbre o plano P) perpendicular a **u**.

b) *sentido*. Os triedros **u**, **v**, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e **u**, **r**, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}$ têm, evidentemente, a mesma disposição.

c) *módulo*. É
$$\begin{aligned} mod\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) &= mod\,\mathbf{u}\,.\,mod\,\mathbf{r} = \\ &= mod\,\mathbf{u}\,.\,(mod\,\mathbf{v}\,.\,sen\,\theta) \\ &= mod\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

Como se vê, a efectivação de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}$, multiplicação vectorial (à esquerda) de **r** por **u**, consistiu numa rotação, feita a **r** no sentido positivo e de amplitude $\frac{\pi}{2}$, efectuada no plano P) perpendicular a **u**, e na multiplicação do seu módulo (de **r**) por *mod* **u**.

Pôsto isto, passemos à demonstração da igualdade 72).

Seja ainda P) o plano perpendicular a **u** e projectemos ortogonalmente sôbre êle (fig. 20) os vectores **v**, **w**, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$; obtêm-se sôbre P) os vectores **r**, **s** e $\overrightarrow{OH} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$.

Pelo que acima se viu, é $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{r}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}$, $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{r} + \mathbf{s})$ logo, a igualdade a demonstrar, 72), reduz-se a $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}$.

Ora esta é manifestamente verdadeira visto que, como para $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{r} + \mathbf{s}$ a multiplicação vectorial por $\mathbf{u}$ (à esquerda)

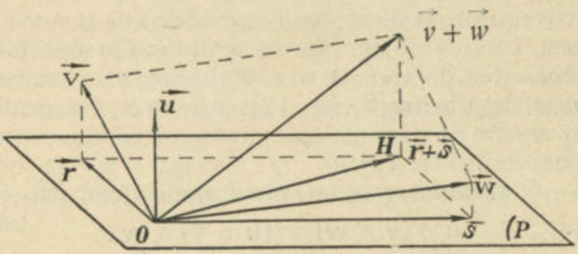


Fig. 20

consiste na rotação sôbre P) de $\frac{\pi}{2}$ no sentido positivo e na multiplicação do módulo por *mod* $\mathbf{u}$, a igualdade $\overrightarrow{OH} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$ não é destruída por virtude dessas modificações e se tem

$$\mathbf{u} \wedge \overrightarrow{OH} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}.$$

Demonstrava-se anàlogamente que

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}.$$

Esta igualdade e 72) generalizam-se sem dificuldade e tem-se

73) $$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k\right) = \sum_{ik} \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{v}_k$$

que, atendendo a 71), se pode escrever sob a forma mais geral

74) $$\left(\sum_i \rho_i \cdot \mathbf{u}_i\right) \wedge \left(\sum_k \sigma_k \cdot \mathbf{v}_k\right) = \sum_{ik} (\rho_i \cdot \sigma_k) \cdot \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{v}_k$$

em que i e k tomam, independentemente um do outro, todos os valores inteiros cada um do seu conjunto, em geral distintos um do outro.

Esta igualdade mostra que *o sinal de produto externo e de combinação linear são permutáveis.*

Passemos agora às propriedades pelas quais o produto vectorial difere do produto ordinário.

3.ª — *O produto vectorial não é comutativo.* Verifica-se a relação

$$75) \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$

Efectivamente, as direcções e os módulos de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ coincidem, como é óbvio, mas os sentidos são opostos visto que a troca dos dois *eixos* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ origina uma mudança na *disposição* do triedro [9, fig. 12]; para que êle continue a ser *dextrorsum* há portanto que mudar o sentido do terceiro eixo, logo verifica-se 75).

4.ª — *O produto vectorial não é associativo,* isto é,

$$76) \qquad \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}.$$

Basta verificar, por exemplo, que as direcções dos dois vectores são diferentes. Ora $\mathbf{r} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ é perpendicular a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (e a $\mathbf{u}$) e como $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ é perpendicular ao plano definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, $\mathbf{r}$ é paralelo a êsse plano. Um raciocínio análogo mostra que $\mathbf{s} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ é paralelo ao plano definido por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, logo as direcções de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, em geral, são diferentes.

5.ª — *É verdade que* $\mathbf{u} \wedge 0 = 0 \wedge \mathbf{u} = 0$, *mas de* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$ *não resulta necessàriamente* $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$; pode ser $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{v} \neq 0$ e $\mathbf{u}$ paralelo a $\mathbf{v}$, como resulta da definição 70).

6.ª — Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vectores não nulos; *é verdade que de* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ *resulta* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *e* $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$, *mas não é verdade que de* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *resulte necessàriamente* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Basta verificar que os módulos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ podem ser diferentes. Ora de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ resulta, fazendo

$$ang(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \theta \quad \text{e} \quad ang(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \theta'$$

$mod\,\mathbf{u} \, . \, mod\,\mathbf{w} \, . \, sen\,\theta = mod\,\mathbf{v} \, . \, mod\,\mathbf{w} \, . \, sen\,\theta'$ donde $mod\,\mathbf{u} \, . \, sen\,\theta = mod\,\mathbf{v} \, . \, sen\,\theta'$ e esta igualdade pode coexistir com $mod\,\mathbf{u} \neq mod\,\mathbf{v}$.

Pode, no entanto, afirmar-se que, *se a igualdade* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *se verifica qualquer que seja o vector* $\mathbf{w}$, *dela resulta necessàriamente* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Com efeito, nessa hipótese, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, porque da igualdade $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ resulta o paralelismo dos dois planos definidos por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ e por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e êsses dois planos só são paralelos para $\mathbf{w}$ qualquer, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem paralelos.

Do paralelismo de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ resulta $sen\,\theta = sen\,\theta'$, donde $mod\,\mathbf{u} = mod\,\mathbf{v}$; por outro lado, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm, necessàriamente, o mesmo sentido (se o não tivessem, seria $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$) logo é $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

7.ª — *Não é possível definir uma operação inversa da da multiplicação vectorial*, pelo menos com o significado habitual, visto que há uma infinidade de vectores cujo produto vectorial por $\mathbf{v}$ é igual a $\mathbf{u}$. Adiante [20, b)] trataremos da operação habitualmente designada pelo nome de *divisão vectorial*.

Expressão cartesiana do produto vectorial. Comecemos por determinar os produtos vectoriais dos vectores unitários dos eixos.

Da definição resulta imediatamente (fig. 21) que

$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0;$

$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j};$

estas três últimas igualdades fixam-se muito fàcilmente notando que a ordem dos vectores unitários nelas é a das três permutações circulares das letras *i, j, k*.

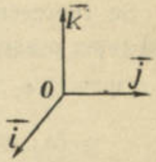


Fig. 21

E como, pela troca dos factores, os produtos mudam de sinal, tem-se

$$77)\quad \begin{cases} \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{cases}$$

Pondo $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ em vez de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 77) toma o aspecto

$$77\,a)\quad \begin{cases} \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \wedge \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{i}_3 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_2 \wedge \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_2 \wedge \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2 \end{cases}$$

igualdades que podem condensar-se nas relações

$$78)\quad \mathbf{i}_j \wedge \mathbf{i}_j = 0, \quad \mathbf{i}_j \wedge \mathbf{i}_{j+1} = -\mathbf{i}_{j+1} \wedge \mathbf{i}_j = \mathbf{i}_{j+2}$$
$$i = 1, 2, 3$$

com a convenção de que, sempre que algum dos índices supera 3 se lhe deve subtrair o número 3.

Pôsto isto, sejam dois vectores

$$\mathbf{u} = a_1 . \mathbf{i} + a_2 . \mathbf{j} + a_3 . \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = b_1 . \mathbf{i} + b_2 . \mathbf{j} + b_3 . \mathbf{k}.$$

Com a aplicação das propriedades 71), 74) e 77), obtém-se

$$79)\quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (a_2 . b_3 - a_3 . b_2) . \mathbf{i} + $$
$$+ (a_3 . b_1 - a_1 . b_3) . \mathbf{j} + (a_1 . b_2 - a_2 . b_1) . \mathbf{k}$$

igualdade a que se pode dar a forma simbólica

$$80)\quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Se representarmos os vectores unitários por $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, 79) toma o aspecto

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\sum_j a_j . \mathbf{i}_j) \wedge (\sum_k b_k . \mathbf{i}_k)$$
$$= (a_2 . b_3 - a_3 . b_2) . \mathbf{i}_1 + (a_3 . b_1 - a_1 . b_3) . \mathbf{i}_2 +$$
$$+ (a_1 . b_2 - a_2 . b_1) . \mathbf{i}_3$$

que pode escrever-se

$$81)\quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \sum_j (a_{j+1} . b_{j+2} - a_{j+2} . b_{j+1}) . \mathbf{i}_j$$

com as mesmas convenções feitas a propósito de 78) quanto aos valores dos índices.

12. — **Aplicações do produto vectorial.** Nos parágrafos seguintes serão vistas largas aplicações do produto vectorial. Por agora vão ser tratadas, a título de exemplos, apenas algumas aplicações geométricas.

I. — **Paralelismo de vectores.** É conhecida já a condição para que dois vectores não nulos sejam paralelos, condição *expressa* *nas coordenadas cartesianas* dêsses vectores [10, 53)]. Mas é possível exprimir essa condição *independentemente do sistema de referência* constituído pelos eixos cartesianos. Basta, com efeito, escrever

82) $$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0\,;$$

se nenhum dos dois vectores **u** e **v** é nulo, esta condição exprime necessàriamente o *paralelismo* de **u** com **v**.

Se introduzirmos nesta condição as decomposições cartesianas dos dois vectores $\mathbf{u} = \sum\limits_k a_k \,.\, \mathbf{i}_k$, $\mathbf{v} = \sum\limits_k b_k \,.\, \mathbf{i}_k$, tem-se [11, 79)]

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) \,.\, \mathbf{i}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \,.\, \mathbf{i}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \,.\, \mathbf{i}_3 = 0$$

donde $a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0\,,\ a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0\,,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

donde, ainda, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ que coïncide com 10, 53 *a*).

II. — **Ângulo de dois vectores.** Sejam **u** e **v** dois vectores e θ o seu ângulo.

De 11, 69) $mod(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = mod\,\mathbf{u} \,.\, mod\,\mathbf{v} \,.\, sen\,\theta$, resulta

83) $$sen\,\theta = \frac{mod(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})}{mod\,\mathbf{u} \,.\, mod\,\mathbf{v}}\,.$$

III. — **Coeficientes da equação do plano.** Viu-se [10, 4.ª] que a equação do plano passando pelo ponto $M(\alpha_k)$ e paralelo aos vectores (não paralelos) $\mathbf{u} = \sum\limits_k l_k \,.\, \mathbf{i}_k$, $\mathbf{v} = \sum\limits_k m_k \,.\, \mathbf{i}_k$ é da forma

64) $$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & l_1 & m_1 \\ x_2 - \alpha_2 & l_2 & m_2 \\ x_3 - \alpha_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou seja

64 *a*) $$a_1 \,.\, (x_1 - \alpha_1) + a_2 \,.\, (x_2 - \alpha_2) + a_3 \,.\, (x_3 - \alpha_3) = 0\,.$$

É fácil ver agora a significação geométrica dos coeficientes a_1, a_2, a_3. Efectivamente, como [11, 80)]

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}$$

verifica-se imediatamente que a_1, a_2, a_3 são, precisamente, as coordenadas do vector $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e como êste, por definição, é perpendicular ao plano definido por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, tem-se que *os coeficientes das variáveis na equação do plano*

$$64\,a) \qquad a_1 . (x_1 - \alpha_1) + a_2 . (x_2 - \alpha_2) + a_3 . (x_3 - \alpha_3) = 0$$

são as coordenadas do vector normal a êsse plano.

IV — **Área dum triângulo.** Sejam três pontos do espaço, M_0, M_1, M_2, não alinhados, e A o valor absoluto da área do triângulo definido por êles (fig. 22); escrevamos $\overrightarrow{M_0M_1} = \mathbf{u}$; $\overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{v}$.

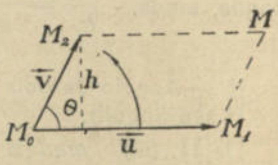


Fig. 22

Como A é metade da área do paralelogramo $M_0M_1MM_2$ e para esta, em valor absoluto, se tem como valor $mod\,\mathbf{u} . h$ e $h = mod\,\mathbf{v} . sen\,\theta$, tem-se $A = \frac{1}{2} mod\,\mathbf{u} . mod\,\mathbf{v} . sen\,\theta$, isto é

$$84) \qquad A = \frac{1}{2} mod\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$$

Se os três pontos M_0, M_1, M_2 estão no plano Oxy, A exprime-se muito simplesmente nas suas coordenadas.

Seja $M_0(\alpha_1, \alpha_2)$, $M_1(\beta_1, \beta_2)$, $M_2(\gamma_1, \gamma_2)$; tem-se

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{M_0M_1} = (\beta_1 - \alpha_1)\,\mathbf{i}_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\,\mathbf{i}_2,$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{M_0M_2} = (\gamma_1 - \alpha_1)\,\mathbf{i}_1 + (\gamma_2 - \alpha_2)\,\mathbf{i}_2$$

donde $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & 0 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}$

$$= [(\beta_1 - \alpha_1) . (\gamma_2 - \alpha_2) - (\beta_2 - \alpha_2) . (\gamma_1 - \alpha_1)] . \mathbf{i}_3 .$$

É, por conseqüência,

$$A = \frac{1}{2} \left| (\beta_1 - \alpha_1) . (\gamma_2 - \alpha_2) - (\beta_2 - \alpha_2) . (\gamma_1 - \alpha_1) \right|$$

isto é, como imediatamente se reconhece,

85) $\qquad A = \frac{1}{2} |\triangle| \qquad$ com $\qquad \triangle = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} .$

V. — **Área orientada. Vectores axiais e polares.** Se, na fig. 22, trocarmos os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o valor absoluto do seu produto externo, e portanto da área A, fica o mesmo mas o sentido do vector $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ muda, como se sabe, conservando a direcção.

Suponhamos que o contôrno do triângulo $M_0M_1M_2$ é descrito por um ponto no sentido indicado na figura 22 — de $\mathbf{u}$ para $\mathbf{v}$: $M_0M_1M_2$ — isto é, no sentido directo: a êsse sentido de percurso vem ligado o sentido positivo de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, sentido tal que o triedro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ tem a disposição do triedro fundamental $Ox_1x_2x_3$. Êste sentido de percurso é tal que a área é deixada *à esquerda* durante o movimento do percurso.

Suponhamos agora o perímetro do triângulo descrito no sentido retrógrado: M_0, M_2, M_1 — a área é deixada então *à direita* durante o percurso e a êste sentido de movimento vem ligado o sentido contrário ao que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ tinha há pouco, sentido que torna agora o triedro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ de disposição contrária à do triedro fundamental de referência.

Estas considerações justificam as definições seguintes:

a) ***Área orientada.*** A tôda a área liga-se o sinal + ou o sinal — conforme o sentido do percurso em que é considerado descrito o seu perímetro : sinal + se êsse sentido é o *directo*, sinal — se é o *retrógrado*.

Na fig. 22 o triângulo $M_0M_1M_2$ tem área $+A$, o triângulo $M_0M_2M_1$ tem área $-A$.

A área do paralelogramo definido por dois vectores vem assim determinada, *em valor absoluto e sinal, pelo produto vectorial dêsses dois vectores* — o módulo é o valor absoluto da área, o sentido dá o sinal dela (1).

b) *Axialidade do espaço.* Mostram as considerações anteriores que é possível definir um conceito de vector diferente do de vector livre, até aqui usado. É êste novo vector o vector determinado em módulo, direcção e sentido por uma *área plana orientada* — o *módulo* é o valor absoluto da área, a *direcção* é a da perpendicular ao plano em que se considera a área e o *sentido* é, sôbre essa direcção, um ou o opôsto conforme o valor algébrico da área, isto é, conforme o sentido do percurso em que se considera descrito o perímetro limitativo correspondente.

Êste conceito difere do de vector livre — determinado em correspondência a um *segmento orientado* — precisamente em o sentido do vector estar dependente do sentido de percurso duma curva ou duma rotação em tôrno dum eixo e, por conseqüência, dependente da orientação do espaço determinada pela *ordem* dos eixos, ou, como se diz habitualmente, da *axialidade* do espaço.

Um vector definido como acima — por correspondência a uma área plana orientada — diz-se um vector *axial;* por oposição, os vectores não dependentes da orientação do espaço, determinados simplesmente por correspondência a um segmento orientado, dizem-se *polares.*

Os vectores polares coïncidem portanto com os vectores livres; em todo o caso só se lhes dá essa designação quando se quiser marcar a sua independência em relação à axialidade do espaço.

Duma maneira geral, dizem-se *axiais* as grandezas, vectoriais ou escalares, cujo sentido, ou sinal, depende da axiali-

---

(1) Os autores alemães designam essa determinação chamando ao produto vectorial $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ a *Ergänzung* da área do paralelogramo definido por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

dade do espaço; dizem-se *polares* aquelas que são independentes da axialidade.

O produto vectorial de dois vectores polares é, manifestamente, *um vector axial*.

Adiante veremos exemplos de escalares axiais.

13. — Produto escalar ou interno.

Definição. Dados dois vectores **u** e **v**, quaisquer, não nulos, dá-se o nome de *produto escalar* ou *produto interno* dêles, e escreve-se $\mathbf{u}|\mathbf{v}$, que se lê **u** *interno* **v**, ao *escalar* definido pela igualdade

$$86)\qquad \mathbf{u}|\mathbf{v} = mod\,\mathbf{u} \,.\, mod\,\mathbf{v} \,.\, cos\,\theta$$

onde θ é o ângulo dos dois vectores. É, como se vê, um *escalar*, ao contrário do produto externo que é, por definição, um *vector*.

Na fig. 23 vê-se que

$$mod\,\mathbf{v} \,.\, cos\,\theta = \overline{\mathrm{OA}} = proj_u\,\mathbf{v}$$

e

$$mod\,\mathbf{u} \,.\, cos\,\theta = \overline{\mathrm{OB}} = proj_v\,\mathbf{u}$$

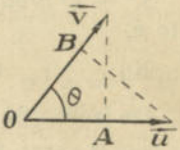


Fig. 23

(indicando os índices aqueles vectores sôbre cujas direcções se fazem as projecções ortogonais).

A definição do produto escalar pode, portanto, dar-se o aspecto

$$86\,a)\qquad \mathbf{u}|\mathbf{v} = mod\,\mathbf{u} \,.\, proj_u\,\mathbf{v} = mod\,\mathbf{v} \,.\, proj_v\,\mathbf{u} \,.$$

Se algum dos vectores é nulo, põe-se, por definição,

$$87)\qquad \mathbf{u}|\mathbf{v} = 0 \,.$$

Propriedades. Como no produto vectorial [11], há algumas propriedades idênticas às do produto ordinário e outras diferentes.

Comecemos pelas primeiras.

1.ª — *Sendo ρ um número real qualquer, tem-se*

$$88)\qquad \rho \,.\, (\mathbf{u}|\mathbf{v}) = (\rho \,.\, \mathbf{u})|\mathbf{v} = \mathbf{u}|(\rho \,.\, \mathbf{v}) \,.$$

Com efeito, de $(\rho\,.\,\mathbf{u})\,|\,\mathbf{v} = mod(\rho\,.\,\mathbf{u})\,.\,mod\,\mathbf{v}\,.\,cos(\rho\,.\,\mathbf{u}\,,\mathbf{v})$ resulta:

a) se $\rho > 0$, $ang(\rho\,.\,\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = ang(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \theta$, logo $(\rho\,.\,\mathbf{u})\,|\,\mathbf{v} = \rho\,.\,mod\,\mathbf{u}\,.\,mod\,\mathbf{v}\,.\,cos\,\theta = \rho\,.\,(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v})$;

b) se $\rho < 0$, $ang(\rho\,.\,\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \pi - \theta$, logo $(\rho\,.\,\mathbf{u})\,|\,\mathbf{v} = |\rho|\,.\,mod\,\mathbf{u}\,.\,mod\,\mathbf{v}\,.\,cos(\pi - \theta) =$
$= -|\rho|\,.\,mod\,\mathbf{u}\,.\,mod\,\mathbf{v}\,.\,cos\,\theta = \rho\,.\,(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v})$.

Do mesmo modo se prova que, em qualquer hipótese, é $\mathbf{u}\,|\,(\rho\,.\,\mathbf{v}) = \rho\,.\,(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v})$. E como para $\rho = 0$ se reduz tudo a zero, fica demonstrada 88) para ρ real qualquer.

2.ª — *O produto escalar é comutativo:*

$$89)\qquad \mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} = \mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}\,.$$

Com efeito, $ang(\mathbf{v}\,,\mathbf{u}) = -\theta$ e $cos(-\theta) = cos\,\theta$.

3.ª — *O produto escalar é distributivo em relação à soma*, isto é,

$$90)\qquad \mathbf{u}\,|\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} + \mathbf{u}\,|\,\mathbf{w}\,.$$

De facto, [86 *a*)] $\mathbf{u}\,|\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = mod\,\mathbf{u}\,.\,proj_u(\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$
$= mod\,\mathbf{u}\,.\,proj_u\,\mathbf{v} + mod\,\mathbf{u}\,.\,proj_u\,\mathbf{w} = \mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} + \mathbf{u}\,|\,\mathbf{w}$.

Anàlogamente se verifica que

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})\,|\,\mathbf{w} = \mathbf{u}\,|\,\mathbf{w} + \mathbf{v}\,|\,\mathbf{w}\,.$$

Conjugando esta propriedade com a primeira, estabelece-se imediatamente que

$$90\,a)\qquad \mathbf{u}\,|\sum_{k=1}^{n}\mu_k\,.\,\mathbf{v}_k = \sum_k \mu_k\,.\,(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}_k)$$

e, mais geralmente ainda,

$$90\,b)\qquad \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\,.\,\mathbf{u}_i\right)\Bigg|\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\,.\,\mathbf{v}_k\right) = \sum_{ik}(\lambda_i\,.\,\mu_k)\,.\,(\mathbf{u}_i\,|\,\mathbf{v}_k)$$

igualdade que mostra que *o sinal de produto interno e o de combinação linear são permutáveis* (comparar com o que se passa no produto vectorial **11**, 74)).

Vejamos agora as propriedades pelas quais o produto escalar se diferencia do produto ordinário.

4.ª — *O produto escalar não é associativo.*

Efectivamente, nem a questão da associatividade tem sequer que pôr-se, visto que é destituído de sentido o produto escalar de três vectores: de qualquer maneira que se entenda $\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}$, esta operação é sempre impossível, por vazia de sentido, visto que não existe produto escalar dum escalar por um vector.

5.ª — *É verdade que se* $\mathbf{u}=0$ *ou* $\mathbf{v}=0$ *é* $\mathbf{u}|\mathbf{v}=0$ *mas de* $\mathbf{u}|\mathbf{v}=0$ *não resulta necessàriamente* $\mathbf{u}=0$ *ou* $\mathbf{v}=0$; *pode ser* $\mathbf{u}\neq 0$, $\mathbf{v}\neq 0$, $\mathbf{u}$ *perpendicular a* $\mathbf{v}$.

De facto, o anulamento do produto escalar pode dar-se em qualquer dos três casos sintetizados no quadro

$$\mathbf{u}|\mathbf{v}=0 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}=0 \\ \mathbf{v}=0 \\ \cos\theta=0 \rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{91}$$

6.ª — *É verdade que de* $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ *resulta* $\mathbf{u}|\mathbf{w}=\mathbf{v}|\mathbf{w}$, *mas não é verdade que de* $\mathbf{u}|\mathbf{w}=\mathbf{v}|\mathbf{w}$ *resulte necessàriamente* $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

Efectivamente, se $\mathbf{w}\neq 0$, $\mathbf{u}|\mathbf{w}=\mathbf{v}|\mathbf{w}$ equivale a $mod\,\mathbf{u}\,.\,cos(\mathbf{u},\mathbf{w})=mod\,\mathbf{v}\,.\,cos(\mathbf{v},\mathbf{w})$ que é, evidentemente, compatível com $mod\,\mathbf{u}\neq mod\,\mathbf{v}$, logo, com $\mathbf{u}\neq\mathbf{v}$.

Pode, no entanto, afirmar-se que de $\mathbf{u}|\mathbf{w}=\mathbf{v}|\mathbf{w}$ resulta $\mathbf{u}=\mathbf{v}$, em dois casos:

1.º — *Quando* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são paralelos.*

Efectivamente, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, fazendo $ang(\mathbf{u},\mathbf{w})=\theta$, $ang(\mathbf{v},\mathbf{w})=\theta'$, ou é $\theta=\theta'$ e os sentidos dos dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são concordantes, ou é $\theta=\pi-\theta'$ e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm sentidos contrários; no primeiro caso, é $cos\,\theta=cos\,\theta'$ donde $mod\,\mathbf{u}=mod\,\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}=\mathbf{v}$; no segundo, é $cos\,\theta=-cos\,\theta'$ donde $mod\,\mathbf{u}=-mod\,\mathbf{v}$ o que é impossível por definição de módulo, logo é necessàriamente $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

2.º — *Quando a igualdade* $\mathbf{u}|\mathbf{w}=\mathbf{v}|\mathbf{w}$ *tem logar qualquer que seja o vector* $\mathbf{w}$.

Com efeito, se assim é, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos e estamos reduzidos ao 1.º caso. O paralelismo de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ resulta do facto de ser $mod\,\mathbf{u}\,.\,cos\,\theta=proj_w\,\mathbf{u}$ e $mod\,\mathbf{v}\,.\,cos\,\theta'=proj_w\,\mathbf{v}$.

Ora, para que dois vectores tenham projecções iguais sôbre *qualquer* vector $\mathbf{w}$, têm manifestamente que ser paralelos e do mesmo sentido.

7.ª — *Não há operação de divisão escalar como inversa da do produto escalar* visto que não há nem escalar nem vector que multiplicado escalarmente por um vector dê outro vector.

Expressão cartesiana do produto escalar. Em primeiro logar, vejamos os valores dos produtos escalares dos vectores unitários dos eixos coordenados. Da definição, 86), resulta imediatamente que, por serem os vectores unitários perpendiculares entre si dois a dois, se tem

$$92)\qquad \begin{cases} \mathbf{i}\,|\,\mathbf{j}=\mathbf{j}\,|\,\mathbf{i}=\mathbf{j}\,|\,\mathbf{k}=\mathbf{k}\,|\,\mathbf{j}=\mathbf{k}\,|\,\mathbf{i}=\mathbf{i}\,|\,\mathbf{k}=0 \\ \mathbf{i}\,|\,\mathbf{i}=\mathbf{j}\,|\,\mathbf{j}=\mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}=1 \end{cases}$$

que se pode escrever, mais simplesmente,

$$93)\qquad \mathbf{i}_j\,|\,\mathbf{i}_k=\delta_{jk}\qquad\qquad j,k=1,2,3$$

onde δ_{jk} são os símbolos de Kronecker, definidos em **7**, 48).

Suponhamos agora que se têm dois vectores $\mathbf{u}=\sum_j a_j\,.\,\mathbf{i}_j$ e $\mathbf{v}=\sum_k b_k\,.\,\mathbf{i}_k$; em virtude das propriedades 88), 90 *b*) e 93), tem-se $\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}=\left(\sum_j a_j\,.\,\mathbf{i}_j\right)\Big|\left(\sum_k b_k\,.\,\mathbf{i}_k\right)=\sum_{jk}(a_j\,.\,b_k)\,.\,(\mathbf{i}_j\,|\,\mathbf{i}_k)=$
$=\sum_{jk} a_j\,.\,b_k\,.\,\delta_{jk}$ donde

$$94)\qquad \mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}=\sum_k a_k\,.\,b_k$$

visto que no somatório duplo se anulam todos os δ_{jk} à excepção daqueles em que os índices são iguais, os quais tomam o valor *1*.

Se em 94) fizermos $\mathbf{v}=\mathbf{u}$, vem $\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}=\sum_k a_k^2$ mas, por outro lado, da definição [86)] resulta que $\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}=(mod\,\mathbf{u})^2$ (1),

---

(1) Alguns autores escrevem $\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}=(mod\,\mathbf{u})^2=\mathbf{u}^2$, definindo, assim, o *quadrado* de $\mathbf{u}$; mas não é talvez muito de recomendar esta forma de escrever visto que ela sugere a definição de potências sucessivas dum vector, o que é impossível fazer, dado que no produto escalar não podem entrar mais de dois factores.

de modo que se tem $(mod\,\mathbf{u})^2 = \sum_k a_k^2$, donde,

95) $$mod\,\mathbf{u} = +\sqrt{\sum_k a_k^2}\,.$$

Se o vector $\mathbf{u}$ é unitário tem-se $mod\,\mathbf{u} = 1$; por outro lado, chamando θ_k, $k = 1, 2, 3$, aos ângulos que êle forma com os eixos coordenados, é [9, 52)] $\mathbf{u} = \sum_k cos\,\theta_k \cdot \mathbf{i}_k$ logo de 95) resulta

96) $$\sum_k cos^2\,\theta_k = 1$$

relação a que satisfazem, pelo que está dito, os *cosenos directores* de qualquer recta do espaço.

14. — Aplicações do produto escalar.

I. — Algumas aplicações geométricas.

a) *Distância de dois pontos*. Sejam os dois pontos M e P; a sua distância *d*, em valor absoluto, é dada pelo módulo do vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{MP}$

97) $$d = mod\,\overrightarrow{MP}\,.$$

É fácil exprimir *d* nas *coordenadas cartesianas* de M e P. Efectivamente, sendo $M(\alpha_k)$, $P(\beta_k)$, $k = 1, 2, 3$, tem-se $\mathbf{u} = \overrightarrow{MP} = \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \cdot \mathbf{i}_k$ [9, 50)] donde, por **13**, 95)

98) $$d = +\sqrt{\sum_k (\beta_k - \alpha_k)^2}\,.$$

Como aplicação imediata dêste resultado, tem-se a *equação da superfície esférica* de centro e raio conhecidos. Se o centro é o ponto fixo $M(\alpha_k)$ e o raio é r, a superfície esférica, logar geométrico dos pontos $P(x_k)$ tais que $mod\,\overrightarrow{MP} = r$, tem por equação

99) $$\sum_k (x_k - \alpha_k)^2 = r^2\,.$$

Se se trata de geometria a duas dimensões, no plano Ox_1x_2, anula-se a coordenada x_3 e tem-se, como valor da distância dos pontos $M(\alpha_1, \alpha_2)$ e $P(\beta_1, \beta_2)$

98 *a*) $$d = +\sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2}.$$

Do mesmo modo, é

99 *a*) $$(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 = r^2$$

a equação da circunferência de centro (α_1, α_2) e raio r.

b) *Ângulo de dois vectores.* De **13**, 86) resulta imediatamente, para valor do *coseno* do ângulo φ dos dois vectores **u** e **v**,

100) $$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \mid \mathbf{v}}{mod\,\mathbf{u} \,.\, mod\,\mathbf{v}}.$$

Para obter a *expressão cartesiana*, não há mais que substituir numerador e denominador conforme **13**, 94) e 95); vem

101) $$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_k a_k \,.\, b_k}{\sqrt{\sum\limits_k a_k^2} \,.\, \sqrt{\sum\limits_k b_k^2}}.$$

Se os vectores **u** e **v** são unitários, tem-se, sendo $\cos\theta_k$ e $\cos\mu_k$, $k = 1, 2, 3$, os cosenos directores respectivos, e atendendo a **9**, 52) e **13**, 96),

102) $$\cos\varphi = \sum_k \cos\theta_k \,.\, \cos\mu_k.$$

A relação 100) junta com **12**, 83) e com a relação fundamental da goniometria $sen^2\varphi + cos^2\varphi = 1$, estabelecem a relação interessante

103) $$(\mathbf{u} \mid \mathbf{v})^2 + [mod(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})]^2 = (mod\,\mathbf{u})^2 \,.\, (mod\,\mathbf{v})^2.$$

Substituindo nesta igualdade os vectores pelas suas *decomposições cartesianas* e atendendo a **11**, 79), **13**, 94) e 95) obtém-se a *identidade de Lagrange*

104) $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) =$
$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 +$
$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2.$

c) *Perpendicularidade de vectores.* Em virtude de **13**, 91) e 94) tem-se imediatamente, como condição de perpendicularidade dos dois vectores, não nulos **u** e **v**,

105) $$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} = 0$$

ou, em *decomposição cartesiana*,

106) $$\sum_k a_k \cdot b_k = 0.$$

Estes resultados permitem resolver fàcilmente o seguinte problema: *determinar a equação do plano que passa pelo ponto* M *e é perpendicular ao vector* **u**.

O ponto geral P do plano deve ser tal que $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ seja sempre perpendicular a **u**, logo é

107) $$\overrightarrow{\mathrm{MP}} \,|\, \mathbf{u} = 0$$

a equação pedida.

Se se quiser a *equação cartesiana*, tem-se, sendo

$\mathbf{u} = \sum_k a_k \cdot \mathbf{i}_k$, $\mathrm{M}(\alpha_k)$, $\mathrm{P}(x_k)$, donde $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \sum_k (x_k - \alpha_k) \cdot \mathbf{i}_k$,

108) $$a_1 \cdot (x_1 - \alpha_1) + a_2 \cdot (x_2 - \alpha_2) + a_3 \cdot (x_3 - \alpha_3) = 0$$

equação que já fôra encontrada [**10**, 64 *a*)] bem como a significação geométrica [**12**, III] dos coeficientes, significação que agora resulta directamente da dedução da equação.

Em geometria plana, é

108 *a*) $$a_1 \cdot (x_1 - \alpha_1) + a_2 \cdot (x_2 - \alpha_2) = 0$$

a *equação da recta*, no plano $Ox_1 x_2$, que passa pelo ponto (α_1, α_2), fixo, e é perpendicular ao vector $\mathbf{u} = a_1 \cdot \mathbf{i}_1 + a_2 \cdot \mathbf{i}_2$.

Das condições de paralelismo [**10**, 53 *a*)] e de perpendicularidade [106], e atendendo à significação dos parâmetros directores das equações normais da recta e dos coeficientes da equação do plano, resulta que, sendo dadas as duas rectas

$$r_1) \quad \frac{x_1-\alpha_1}{l_1}=\frac{x_2-\alpha_2}{l_2}=\frac{x_3-\alpha_3}{l_3}$$

$$r_2) \quad \frac{x_1-\beta_1}{m_1}=\frac{x_2-\beta_2}{m_2}=\frac{x_3-\beta_3}{m_3}$$

e os dois planos

$$P_1) \quad a_1.(x_1-\lambda_1)+a_2.(x_2-\lambda_2)+a_3.(x_3-\lambda_3)=0$$

$$P_2) \quad b_1.(x_1-\mu_1)+b_2.(x_2-\mu_2)+b_3.(x_3-\mu_3)=0$$

se têm os seguintes grupos de condições:

paralelismo

de $r_1)$ a $r_2)$ $\dfrac{l_1}{m_1}=\dfrac{l_2}{m_2}=\dfrac{l_3}{m_3}$

de $P_1)$ a $P_2)$ $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

de $r_1)$ a $P_1)$ $a_1.l_1+a_2.l_2+a_3.l_3=0$

perpendicularidade

de $r_1)$ a $r_2)$ $l_1.m_1+l_2.m_2+l_3.m_3=0$

de $P_1)$ a $P_2)$ $a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

de $r_1)$ a $P_1)$ $\dfrac{a_1}{l_1}=\dfrac{a_2}{l_2}=\dfrac{a_3}{l_3}$.

d) *Aplicações à goniometria plana*. São fáceis de deduzir as chamadas *fórmulas de adição de ângulos*. Sejam **u** e **v** (fig. 24) dois vectores unitários. Como

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{sen}\beta,$$

tem-se de 9, 52),

$$\mathbf{u}=\cos\alpha.\mathbf{i}_1+\operatorname{sen}\alpha.\mathbf{i}_2 \quad \mathbf{v}=\cos\beta.\mathbf{i}_1+\operatorname{sen}\beta.\mathbf{i}_2$$

donde

$$\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}=(\cos\alpha.\mathbf{i}_1+\operatorname{sen}\alpha.\mathbf{i}_2)\,|\,(\cos\beta.\mathbf{i}_1+\operatorname{sen}\beta.\mathbf{i}_2).$$

Mas $\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v} = \cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta)$, logo, efectuando o segundo membro, tem-se

109) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta\,.$

Se, em vez do produto escalar, fizermos o produto vectorial de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$, tem-se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\cos\alpha . \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha . \cos\beta) . \mathbf{i}_3$ e como $mod(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \operatorname{sen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ e como, ainda, o *coeficiente* de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ segundo $\mathbf{i}_3$ é positivo visto que, dada a disposição da fig. 24, o producto vectorial é dirigido para a parte positiva de Oz, obtém-se

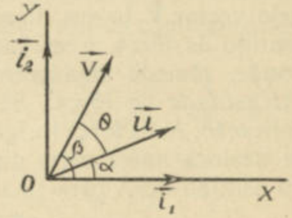


Fig. 24

110) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \,.\, \cos\alpha\,.$

Deduzem-se também com grande simplicidade algumas fórmulas da geometria do triângulo.

É assim que, da igualdade (fig. 25) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, se tira, multiplicando escalarmente por $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\,|\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,|\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\,|\,\overrightarrow{AC} = mod\overrightarrow{AB} . mod\overrightarrow{AC} . \cos\alpha + mod\overrightarrow{BC} . mod\overrightarrow{AC} . \cos\beta$ donde, representando em geral $mod\,\overrightarrow{PQ}$ por $\overline{PQ}$, e notando que $\overrightarrow{AC}\,|\,\overrightarrow{AC} = \overline{AC}^2$,

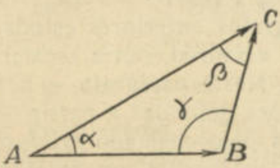


Fig. 25

111) $\overline{AC} = \overline{AB} \,.\, \cos\alpha + \overline{BC} \,.\, \cos\beta.$

Fazendo, do mesmo modo, a multiplicação escalar por $\overrightarrow{AC}$ mas substituindo, no segundo membro, $\overrightarrow{AC}$ por $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, obtém-se

$$\overline{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\,|\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\,|\,\overrightarrow{BC}$$

$$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \,.\, \overline{BC} \,.\, \cos(\pi - \gamma) \quad \text{isto é,}$$

112) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{BC}.\cos\gamma$.

Deduziam-se, com igual simplicidade, outras fórmulas.

II. — **Trabalho.**

Seja considerada uma fôrça F, representada geomètricamente pelo vector **F** (a sua direcção e sentido definem a direcção e sentido da fôrça, o seu módulo corresponde, tomada uma certa unidade, à *intensidade* da fôrça). Se o ponto de aplicação, A, da fôrça (origem do vector) se desloca numa certa direcção AB, e no sentido de A para B, atingindo essa deslocação a amplitude $\overline{AB} = mod\,\overrightarrow{AB}$, chama-se *trabalho* realizado pela fôrça F, por efeito do deslocamento, ao produto escalar dos dois vectores **F** e $\overrightarrow{AB}$:

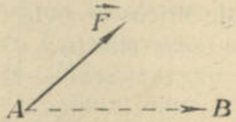


Fig. 26

113) $$W = \mathbf{F} \,|\, \overrightarrow{AB}.$$

Com esta definição, as propriedades do conceito físico de *trabalho* podem ser estudadas com a ajuda do potente aparelho formal da entidade analítica *produto escalar*.

15. — **Produto mixto.** Nos parágrafos anteriores estudamos duas funções de vectores, uma vectorial, outra escalar, definidas a partir de *dois* vectores. Neste parágrafo e nos seguintes vamos ocupar-nos de funções definidas a partir de *mais de dois* vectores. Começaremos pelo chamado *produto mixto* de três vectores, que é, como vai ver-se, um *escalar*.

Definição. Dados três vectores **u**, **v**, **w**, chama-se *produto mixto* deles, e escreve-se $\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, que se lê **u** *interno* **v** *externo* **w**, ao produto escalar de **u** pelo produto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

O escrever $\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ não se presta a nenhuma confusão quanto ao agrupamento dos vectores, visto que $(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ é destituido de significação; o único agrupamento possível é $\mathbf{u} \,|\, (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.

O produto mixto é definido quaisquer que sejam os três vectores **u**, **v**, **w**; os casos de anulamento ou de paralelismo que podem apresentar-se são abrangidos pelas extensões dadas às definições de produto vectorial e escalar [11,70),13,87].

Expressão cartesiana. Sejam

$$\mathbf{u}=\sum_k a_k . \mathbf{i}_k , \quad \mathbf{v}=\sum_k b_k . \mathbf{i}_k , \quad \mathbf{w}=\sum_k c_k . \mathbf{i}_k$$

as decomposições cartesianas dos três vectores. Tem-se [11, 80)] $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}=\sum_k m_k . \mathbf{i}_k$ onde m_1, m_2, m_3 são os complementos algébricos dos elementos da primeira linha do determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Como, [13, 94)] $\mathbf{u} | \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}=\sum_k a_k . m_k=a_1 . m_1+a_2 . m_2+ + a_3 . m_3$, tem-se imediatamente

$$\text{114)} \qquad \mathbf{u} | \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Como caso particular interessante, tem-se que, se fôr $\mathbf{u}=\mathbf{i}$, $\mathbf{v}=\mathbf{j}$, $\mathbf{w}=\mathbf{k}$, é

$$\text{115)} \qquad \mathbf{i} | \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1 .$$

Propriedades. 1.ª — *O produto mixto conserva o valor absoluto e muda de sinal quando se trocam dois vectores.*

É conseqüência imediata de 114).

2.ª — *O produto mixto não se altera em valor absoluto nem em sinal quando se efectua uma permutação circular sôbre os vectores.*

Efectivamente, as permutações circulares de três letras — *uvw, vwu, wuv* — são pares, o que corresponde a um número par de trocas de linhas feitas em 114). Pode, portanto, escrever-se

$$\text{116)} \qquad \mathbf{u} | \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}=\mathbf{v} | \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}=\mathbf{w} | \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} .$$

3.ª — *O produto mixto não se altera, em valor absoluto nem em sinal, quando se trocam os sinais de produto escalar e vectorial,* isto é,

117) $$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w}.$$

É conseqüência imediata de 116), último termo, e da comutatividade do produto escalar.

4.ª — *O produto mixto anula-se sempre que, e só quando, se verifica algum dos três casos: anulamento de algum dos vectores, colinearidade de dois quaisquer, coplanaridade dos três.*

Efectivamente:

a) Se se dá qualquer dêstes três casos, o determinante 114) é nulo por ter: ou uma linha nula, ou duas proporcionais ou as três linearmente dependentes [7, 44 *a*)].

b) Se $\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$, ou é [13, 91)] $\mathbf{u} = 0$, ou $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$, ou $\mathbf{u}$ perpendicular a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$; por sua vez, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0$ decompõe-se em $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{w} = 0$ ou $\mathbf{v}$ paralelo a $\mathbf{w}$; e $\mathbf{u}$ perpendicular a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ significa que $\mathbf{u}$ é paralelo ao plano de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Repetindo o raciocínio para os outros dois aspectos de 116), verifica-se a verdade do enunciado (essa repetição é necessária apenas para estabelecer o paralelismo, pois as outras duas condições reencontram-se tais quais eram).

Aplicações geométricas. I) *Coplanaridade de três vectores.* Como resulta da propriedade 4.ª, a condição de coplanaridade de três vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, pode ser posta sob a forma

118) $$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0.$$

Se entre êles se verificar qualquer relação mais simples: anulamento de algum, ou paralelismo de dois, o produto mixto continua a ser nulo, mas não vai utilizar-se êsse anulamento para a exprimir — há maneiras mais simples: anulamento do módulo, anulamento do produto vectorial — de modo que 118) se emprega *apenas* para exprimir a coplanaridade de três vectores no caso geral—sem anulamento e sem paralelismo. De resto, a relação 118) é equivalente à relação já conhecida [7, 44)] $\mathbf{w} = \lambda . \mathbf{u} + \mu . \mathbf{v}$ visto que, por ser o determinante das coordenadas [114)] nulo, uma linha (por exemplo a terceira) é combinação linear das duas outras.

A condição de coplanaridade 118) permite escrever muito simplesmente *a equação do plano que passa pelos três pontos, não alinhados,* M_0, M_1, M_2.

Como o ponto geral P do plano tem que ser tal que (fig. 27) $\overrightarrow{M_0P}$ $\overrightarrow{M_0M_1}$ e $\overrightarrow{M_0M_2}$ sejam coplanares tem-se para equação pedida

$$119) \quad \overrightarrow{M_0P} \,|\, \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} = 0$$

que é equivalente a **10**, 62).

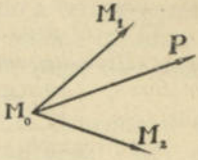


Fig. 27

Para *equação cartesiana*, tem-se, sendo $(\alpha_k), (\beta_k), (\gamma_k), (x_k)$ $k = 1, 2, 3$, respectivamente, as coordenadas de M_0, M_1, M_2, P, e atendendo a 114),

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 & x_3 - \alpha_3 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 - \alpha_3 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 & \gamma_3 - \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que é a equação já achada **10**, 66).

A condição de não alinhamento dos três pontos estabelece-se para evitar o paralelismo de dois dos vectores em 119) e, por conseqüência, que as equações vectorial e cartesiana se transformem em identidades.

II) *Volume dum paralelipípedo*. a) *Valor absoluto*. Seja o paralelipípedo da fig. 28 com arestas, concorrentes num ponto, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$, $\overline{M_0M_3}$ e altura $h = \overline{M_0M} = \overline{M_0M_3} \,.\, cos\,\theta$.

Chamando V ao *valor absoluto* do volume e A ao da área da base, tem-se $V = A \,.\, h$ donde, por **12**, 84),

$$V = mod(\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2}) \,.\, h$$

$$= mod(\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2}) \,.\, mod\,\overrightarrow{M_0M_3} \,.\, |cos\,\theta|$$ e como $\overrightarrow{M_0M}$ tem a direcção do produto vectorial $M_0M_1 \wedge M_0M_2$ tem-se, por definição de produto mixto,

$$120) \qquad V = \left| \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \,|\, \overrightarrow{M_0M_3} \right|$$

ou, o que é o mesmo, pela propriedade 3.ª,

$$120\,a) \qquad V = \left| \overrightarrow{M_0M_1} \,|\, \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_3} \right|.$$

Para *expressão cartesiana* tem-se, pelo mesmo raciocínio pelo qual se deduziu a equação cartesiana a partir de 119),

121) $$V = |\triangle|$$

com $$\triangle = \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 & x_3 - \alpha_3 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 - \alpha_3 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 & \gamma_3 - \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) *Sinal. Volume orientado.* Assim como para a área [12, V)], pode definir-se *volume orientado*; daremos a definição seguinte — ao volume do paralelipípedo de arestas **a, b, c,** por esta ordem, concorrentes num vértice, liga-se o sinal + ou o sinal — conforme o triedro **a, b, c** fôr de disposição positiva ou negativa [9]. Corresponde esta definição a tomar o volume como positivo ou negativo conforme o produto mixto $\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ e portanto o determinante de 121) fôr positivo ou negativo.

Efectivamente, em primeiro logar, o paralelipípedo de arestas $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ (por esta ordem) é positivo (disposição do triedro fundamental de referência) e $\mathbf{i}_1 \,|\, \mathbf{i}_2 \wedge \mathbf{i}_3 = +1$ [115)]; por outro lado, todo o paralelipípedo resultante dêste por deformação contínua das arestas (em comprimentos e ângulos) conserva o sinal desde que a disposição do triedro das arestas se não altere, pela definição dada; ora, enquanto essa alteração se não der, o produto mixto não muda também o sinal

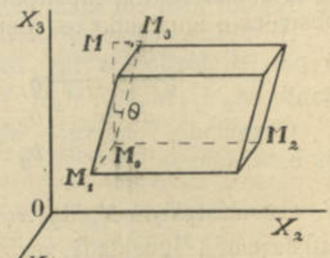


Fig. 28

visto êste depender, *apenas*, do sinal de $\cos\theta$ (θ = ângulo do primeiro vector com o produto vectorial dos outros dois) e, portanto, da orientação do triedro formado pelos três vectores. Por exemplo, enquanto a deformação do paralelipípedo conservar a disposição relativa das duas primeiras arestas e a terceira fizer um ângulo agudo com Oz, o triedro tem a disposição de $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ e o produto mixto é positivo. O produto anula-se (e, evidentemente, o volume) quando a terceira aresta passar pelo plano das duas primeiras, e ambos (produto e volume) tomam o sinal — desde que ela atravesse êsse plano passando a fazer um ângulo obtuso com Oz.

Pela definição dada, o *escalar* volume fica dependente da orientação dos eixos e, portanto, da *axialidade* [12] do espaço — a todo o escalar nestas condições chama-se *escalar axial*.

Se os três vectores **a, b, c** são *polares*, o seu produto mixto, ou seja o *produto do vector polar* **a** *pelo vector axial* $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ é, pelo que acaba de ver-se, um *escalar axial*.

Aplicação algébrica. *Regra de Cramer.* Sejam os três vectores não coplanares $\mathbf{a} = \sum_k a_k . \mathbf{i}_k$, $\mathbf{b} = \sum_k b_k . \mathbf{i}_k$, $\mathbf{c} = \sum_k c_k . \mathbf{i}_k$. O vector $\mathbf{u} = \sum_k u_k . \mathbf{i}_k$ pode decompôr-se segundo **a, b, c,** conforme 7, 45); tem-se $\mathbf{u} = x_1 . \mathbf{a} + x_2 . \mathbf{b} + x_3 . \mathbf{c}$ igualdade donde se tira, substituindo os vectores pelas suas decomposições e igualando os coeficientes de $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$

$$\begin{cases} a_1 . x_1 + b_1 . x_2 + c_1 . x_3 = u_1 \\ a_2 . x_1 + b_2 . x_2 + c_2 . x_3 = u_2 \\ a_3 . x_1 + b_3 . x_2 + c_3 . x_3 = u_3 . \end{cases}$$

Os valores de x_1, x_2, x_3 que satisfizerem a êste sistema satisfazem à igualdade vectorial $\mathbf{u} = x_1 . \mathbf{a} + x_2 . \mathbf{b} + x_3 . \mathbf{c}$ e vice-versa, de modo que a resolução do sistema se pode reduzir à determinação dos valores de x_1, x_2, x_3 tais que ela se verifique. Essa determinação é muito simples; basta, para calcular, por exemplo, x_1, multiplicar escalarmente ambos os membros por $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$; vem

$$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = x_1 . \mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + x_2 . \mathbf{b} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + x_3 . \mathbf{c} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} .$$

Os últimos dois produtos mixtos são nulos, pela propriedade 4.ª. Fica, portanto,

$$x_1 = \frac{\mathbf{u} \mid \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

que é, precisamente, o valor dado para x_1 pela regra de Cramer. Supoz-se, claro, que os vectores **a**, **b**, **c** não são coplanares, para evitar o anulamento do determinante que figura em denominador. Determinavam-se anàlogamente x_2 e x_3.

16. — Duplo produto vectorial.

Definição. Dados três vectores **u**, **v**, **w**, quaisquer, chama-se *duplo produto vectorial* deles ao vector

122) $$\mathbf{r} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Como se sabe das propriedades do produto vectorial, não é indiferente a localização dos parêntesis em 122); viu-se efectivamente que

11,76) $$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

É, por isso, indispensável indicar sempre na definição do duplo produto vectorial qual dos dois agrupamentos se entende.

Propriedades. 1.ª — *O duplo produto vectorial é coplanar aos vectores* **v** *e* **w** *e tem-se, por conseqüência,*

123) $$\mathbf{r} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \lambda . \mathbf{v} + \mu . \mathbf{w}$$

onde λ *e* μ *são dois coeficientes a determinar.*

Efectivamente, **r** é perpendicular a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ logo é paralelo ao plano de **v** e **w** e, por conseqüência, verifica-se 123) por fôrça de 7,44).

2.ª — *Os coeficientes* λ *e* μ *de* 123) *têm por valores* $\lambda = \mathbf{u} \mid \mathbf{w}$, $\mu = -\mathbf{u} \mid \mathbf{v}$ *e é, portanto,*

124) $$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \mid \mathbf{w}) . \mathbf{v} - (\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) . \mathbf{w}.$$

Façamos a demonstração analítica desta propriedade. Para isso, consideremos as decomposições cartesianas dos três vectores

$$\mathbf{u}=a_1.\mathbf{i}_1+a_2.\mathbf{i}_2+a_3.\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{v}=b_1.\mathbf{i}_1+b_2.\mathbf{i}_2+b_3.\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{w}=c_1.\mathbf{i}_1+c_2.\mathbf{i}_2+c_3.\mathbf{i}_3$$

e suponhamos, *em primeiro logar*, que $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\neq 0$. Tem-se, então, [11, 79)]

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}&=(b_2c_3-b_3c_2).\mathbf{i}_1+(b_3c_1-b_1c_3).\mathbf{i}_2+(b_1c_2-b_2c_1).\mathbf{i}_3\\&=m_1.\mathbf{i}_1+m_2.\mathbf{i}_2+m_3.\mathbf{i}_3\end{aligned}$$

donde $\quad \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=X_1.\mathbf{i}_1+X_2.\mathbf{i}_2+X_3.\mathbf{i}_3$

com [11, 79)].

$$\begin{cases}X_1=a_2.m_3-a_3.m_2\\X_2=a_3.m_1-a_1.m_3\\X_2=a_1.m_2-a_2.m_1.\end{cases}$$

Ora, substituindo, obtém-se

$$\begin{aligned}X_1&=a_2.(b_1c_2-b_2c_1)-a_3.(b_3c_1-b_1c_3)\\&=b_1.(a_2c_2+a_3c_3)-c_1.(a_2b_2+a_3b_3)\\&=b_1.(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1.(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\&=b_1.(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})-c_1.(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v})\end{aligned}$$

e, análogamente

$$X_2=b_2.(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})-c_2.(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v})$$
$$X_3=b_3.(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})-c_3.(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}).$$

Multiplicando, agora, ordenadamente estas igualdades por $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ e somando, obtém-se

$$\begin{aligned}X_1.\mathbf{i}_1+X_2.\mathbf{i}_2+X_3.\mathbf{i}_3&=(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w}).(b_1.\mathbf{i}_1+b_2.\mathbf{i}_2+b_3.\mathbf{i}_3)-\\&\quad-(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}).(c_1.\mathbf{i}_1+c_2.\mathbf{i}_2+c_3.\mathbf{i}_3)\\&=(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w}).\mathbf{v}-(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}).\mathbf{w}\end{aligned}$$

o que demonstra 124), no caso, que supozemos, de ser $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\neq 0$.

Suponhamos agora que $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=0$; então [11, 5.ª] ou é $\mathbf{v}=0$, ou $\mathbf{w}=0$, ou $\mathbf{v}$ paralelo a $\mathbf{w}$. Em qualquer dos dois primeiros casos é, evidentemente, $\mathbf{r}=0$ e o segundo membro de 124) anula-se também. Se é $\mathbf{v}$ paralelo a $\mathbf{w}$ tem-se [7, 39)] $\mathbf{v}=\rho.\mathbf{w}$; $\mathbf{r}$ anula-se e o segundo membro de 124) transforma-se em

$$(\mathbf{u}|\mathbf{w}).(\rho.\mathbf{w})-\mathbf{u}|(\rho.\mathbf{w}).\mathbf{w}=\rho.[(\mathbf{u}|\mathbf{w}).\mathbf{w}-(\mathbf{u}|\mathbf{w}).\mathbf{w}]=0.$$

A fórmula 124) é, portanto, geral.

3.ª — *A soma dos duplos produtos vectoriais obtidos fazendo as permutações circulares sôbre os três vectores é nula*, isto é

$$125)\quad \mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})+\mathbf{v}\wedge(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})+\mathbf{w}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=0.$$

Com efeito, pela propriedade anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})&=(\mathbf{u}|\mathbf{w}).\mathbf{v}-(\mathbf{u}|\mathbf{v}).\mathbf{w}\\ \mathbf{v}\wedge(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u})&=(\mathbf{v}|\mathbf{u}).\mathbf{w}-(\mathbf{v}|\mathbf{w}).\mathbf{u}\\ \mathbf{w}\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})&=(\mathbf{w}|\mathbf{v}).\mathbf{u}-(\mathbf{w}|\mathbf{u}).\mathbf{v}\end{aligned}$$

donde, somando ordenadamente e atendendo à comutatividade do produto escalar, se obtém 125).

17. — **Produtos de 4 vectores.** Consideraremos dois produtos, definidos a partir de quatro vectores, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$:

a) o *escalar* $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,|\,(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$;

b) o *vector* $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$.

Vejamos como calculá-los.

a) **Cálculo do escalar** $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})|(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})$. É

$$126)\qquad (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})|(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}|\mathbf{c} & \mathbf{b}|\mathbf{c}\\ \mathbf{a}|\mathbf{d} & \mathbf{b}|\mathbf{d}\end{vmatrix}.$$

Com efeito, o produto quádruplo de que estamos tratando pode ser considerado como um produto mixto dos três vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}$, tanto como um produto mixto dos três vectores $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$. Isto, que resulta imediatamente da definição de produto mixto [15], pode ser verificado directamente por via analítica, o que deixamos ao cuidado do leitor.

Tem-se, portanto, considerando os três factores, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}$ e atendendo à permutabilidade dos sinais de produto vectorial e escalar no produto mixto [15, prop. 3.ª] e às propriedades do duplo produto vectorial [16, 124)] bem como a 13, 88),

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,|\, (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \,|\, [(\mathbf{b}|\mathbf{d}).\mathbf{c} - (\mathbf{b}|\mathbf{c}).\mathbf{d}]$$
$$= (\mathbf{b}|\mathbf{d}).(\mathbf{a}|\mathbf{c}) - (\mathbf{b}|\mathbf{c}).(\mathbf{a}|\mathbf{d}),$$

o que demonstra 126).

b) **Estudo do vector** $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})$.

Em primeiro logar, verifica-se que êste vector, visto ser perpendicular a $\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$, é coplanar a $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ logo tem-se [7, 44)]

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \lambda.\mathbf{c} + \mu.\mathbf{d}.$$

Por outro lado, por ser êle também perpendicular a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, é coplanar a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e portanto

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \xi.\mathbf{a} + \eta.\mathbf{b}.$$

Os coeficientes λ e μ determinam-se fàcilmente do modo seguinte: o produto quádruplo pode ser considerado como um duplo producto vectorial cujos factores são $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$; tem-se, portanto, de 16, 124),

127) $$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})|\mathbf{d}].\mathbf{c} - [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})|\mathbf{c}].\mathbf{d}$$

isto é
$$\begin{cases} \lambda = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,|\, \mathbf{d} \\ \mu = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,|\, \mathbf{c}. \end{cases}$$

Anàlogamente se determinam ξ e η; tem-se

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = -(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$
$$= -\{[(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})|\mathbf{b}].\mathbf{a} - [(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})|\mathbf{a}].\mathbf{b}\}$$

isto é,

128) $$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = -[(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})|\mathbf{b}].\mathbf{a} + [(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})|\mathbf{a}].\mathbf{b}.$$

É portanto
$$\begin{cases} \xi = -\mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \,|\, \mathbf{b} \\ \eta = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \,|\, \mathbf{a}. \end{cases}$$

As igualdades 127) e 128) permitem, no caso em que o produto mixto $\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ não é nulo, isto é, em que, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ não são coplanares [15) prop. 4.ª], calcular os coeficientes da decomposição de $\mathbf{d}$ segundo o triedro, não rectangular em geral, formado por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Com efeito, subtraindo ordenadamente 127) e 128) obtém-se

$$0 = -(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \,|\, \mathbf{b}).\mathbf{a} + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \,|\, \mathbf{a}).\mathbf{b} - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,|\, \mathbf{d}).\mathbf{c} + \\ + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,|\, \mathbf{c}).\mathbf{d}$$

que pode escrever-se, atendendo às propriedades do produto mixto [15],

$$129) \quad (\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}).\mathbf{d} - (\mathbf{b} \,|\, \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}).\mathbf{a} + (\mathbf{c} \,|\, \mathbf{d} \wedge \mathbf{a}).\mathbf{b} - \\ - (\mathbf{d} \,|\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}).\mathbf{c} = 0$$ [1]

e daqui tira-se **d** em combinação linear de **a, b, c** visto que, por hipótese, $\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \neq 0$.

18. — **Operadores lineares no plano.** Seja U um *sistema linear* [5] qualquer e seja k o símbolo de uma operação por meio da qual os elementos do sistema U são transformados em outros elementos, pertencentes ou não a U. A k dá-se o nome de *operador* [2] e, dado o elemento u de U, representa-se por $k(u)$ o resultado que se obtém após a aplicação, sôbre u, da operação de que se trata.

Por exemplo, no sistema linear de vectores do espaço, os símbolos de produto escalar e produto vectorial são operadores que transformam: o primeiro, vectores em escalares, o segundo, vectores em vectores.

O operador k diz-se *linear* quando se comporta, em relação à *adição* e à *multiplicação por um número real* (que são, como se sabe, as operações que estruturam os sistemas lineares), do modo seguinte:

$$130) \quad \begin{cases} k(u_1 + u_2) = k(u_1) + k(u_2) \\ k(\rho . u) = \rho . k(u) \qquad \rho \text{ número real qualquer.} \end{cases}$$

Destas igualdades resulta imediatamente que

(1) Esta igualdade fixa-se fàcilmente notando que os quatro termos do primeiro membro contêm, com sinais alternadamente + e —, as permutações circulares das letras *a, b, c, d.*

(2) O operador pode definir-se independentemente de U ser ou não um sistema linear; o que há de essencial na noção de operador é a *transformação* de elemento em elemento e não a natureza do conjunto em que opera.

131) $$k\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i \, . \, u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \, . \, k(u_i)$$

que mostra que *o símbolo de operador linear é permutável com o de combinação linear.*

O produto escalar e produto vectorial, são, em virtude da definição dada, *operadores lineares* [11, 74); 13, 90 *b*)].

Neste parágrafo vamos estudar mais dois operadores, cujo carácter *linear* será estabelecido: o operador i, ou *operador de rotação recta*, e o operador $e^{i\theta}$, ou *operador de rotação geral*.

Em tudo o que vai seguir-se, suporemos que os vectores considerados pertencem a um mesmo plano (ou lhe são paralelos, por serem vectores livres), e representaremos por **e** o *vector unitário normal a êsse plano*. Se o plano fôr o plano Oxy, será $\mathbf{e} = \pm \mathbf{k}$, significando **k**, como sempre, o vector unitário do eixo Oz.

I. — **Operador i** *(rotação recta). Definição.* Dá-se o nome de *operador i* àquele operador que produz sôbre um vector **u** a transformação que consta da igualdade

132) $$i(\mathbf{u}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}.$$

Vejamos qual a significação geométrica dêste operador.

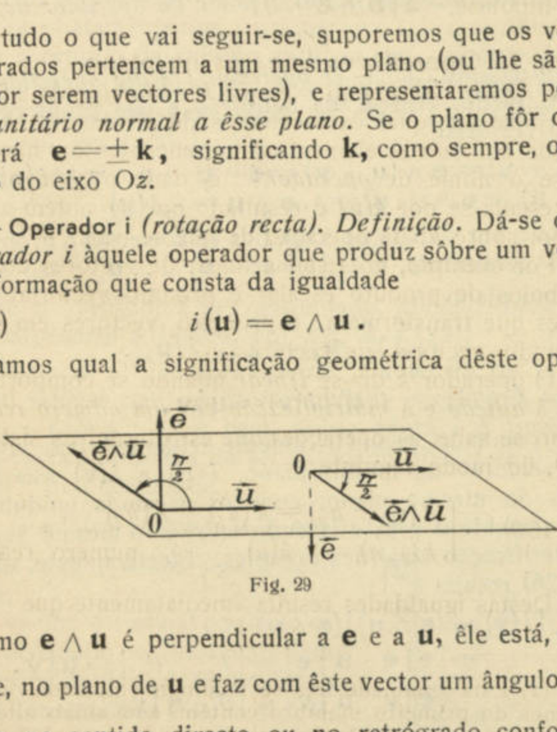


Fig. 29

Como $\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}$ é perpendicular a **e** e a **u**, êle está, evidentemente, no plano de **u** e faz com êste vector um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, contado no sentido directo ou no retrógrado conforme os dois sentidos possíveis na orientação de **e**; se essa orientação é tal que **e** está em relação ao plano dado como o eixo Oz em relação ao plano Oxy (triedro da esquerda na fig. 29), o ângulo $\frac{\pi}{2}$ é descrito no sentido directo. Como, por outro lado, $\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}$ tem o mesmo módulo que $\mathbf{u}$, tem-se que *a aplicação, ao vector* $\mathbf{u}$, *ao operador i, significa geomètricamente a rotação de* $\mathbf{u}$, *no plano considerado (normal a* $\mathbf{e}$*) de* $\frac{\pi}{2}$ *radianos, no sentido directo ou retrógrado, conforme o sentido de* $\mathbf{e}$.

Com isto, fica justificado o nome de *operador de rotação recta.*

Propriedades. 1.ª — *O operador i é um operador linear.* Com efeito, tem-se, da definição e das propriedades do produto vectorial,

$$i(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{v} = i(\mathbf{u}) + i(\mathbf{v})$$
$$i(\rho . \mathbf{u}) = \mathbf{e} \wedge (\rho . \mathbf{u}) = \rho . \mathbf{e} \wedge \mathbf{u} = \rho . i(\mathbf{u})$$

com o que, em virtude de 130), fica estabelecida a propriedade.

Mais geralmente, é [131)] se $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$ são vectores do mesmo plano

133) $$i\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \mathbf{u}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . i(\mathbf{u}_k).$$

2.ª — É 134) $$i(\mathbf{u}) \,|\, i(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}.$$

Êste resultado, geomètricamente evidente (visto que, sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vectores do mesmo plano, $i(\mathbf{u})$ e $i(\mathbf{v})$ são também vectores do mesmo plano, com os mesmos módulos que, respectivamente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e fazendo entre si o mesmo ângulo)[1] é de verificação analítica simples. Efectivamente, de 132) e **17**, 126) resulta

$$i(\mathbf{u}) \,|\, i(\mathbf{v}) = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}) \,|\, (\mathbf{e} \wedge \mathbf{v})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}|\mathbf{e} & \mathbf{u}|\mathbf{e} \\ \mathbf{e}|\mathbf{v} & \mathbf{u}|\mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}|\mathbf{v} \end{vmatrix} = \mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}.$$

---

(1) Note-se que a rotação é feita no mesmo sentido para os dois vectores (visto que êsse sentido só depende do do vector $\mathbf{e}$) o que conserva o ângulo.

3.ª — É 135) $i(\mathbf{u}) \wedge i(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Demonstra-se geomètricamente, pelas mesmas considerações feitas acima, ou analìticamente, recorrendo às propriedades do produto quádruplo vectorial [**17**, 127)] e do produto mixto.

4.ª — *Potências sucessivas de i.*

É possível definir as potências de i de expoentes $2, 3, \ldots$; basta definir i^2 pela igualdade $i^2(\mathbf{u}) = i(i\,\mathbf{u})$ e, em geral,

$$136)\qquad i^n(\mathbf{u}) = i\,[i^{n-1}(\mathbf{u})].$$

Em face da significação geométrica do operador i, (v. fig. 29) verifica-se imediatamente que, qualquer que seja o sentido de **e**, e portanto o sentido da rotação de **u**, se tem $i^2(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$, $i^3(\mathbf{u}) = -i(\mathbf{u})$, $i^4(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \ldots$, igualdades que podem traduzir-se, *simbòlicamente*, por $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1, \ldots$, ou, em geral

$$137)\qquad i^{4q+r} = \begin{cases} 1 \leftarrow r = 0 \\ i \leftarrow r = 1 \\ -1 \leftarrow r = 2 \\ -i \leftarrow r = 3 \end{cases}$$

com o que o operador i fica assimilado, *simbòlicamente*, à *unidade imaginária i* [Lições, vol. 1.º, **2**, **7**, 25)].

II. — **Operador** $e^{i\theta}$ *(rotação geral).* Da teoria da função exponencial sabe-se que, sendo i a unidade imaginária, se tem $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$. Pois bem, sendo agora i o operador de rotação recta que acaba de ser estudado, define-se o novo operador $e^{i\theta}$ pela igualdade

$$138)\qquad e^{i\theta}(\mathbf{u}) = \cos\theta\,.\,\mathbf{u} + \mathrm{sen}\,\theta\,.\,i(\mathbf{u}).$$

Vejamos qual é a sua significação geométrica.

Seja o vector **e** normal ao plano da figura 30 e orientado positivamente para a parte anterior do plano da figura. Dado o vector **u**, construamos $i(\mathbf{u}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}$, a partir da linha de acção de **u** marquemos o ângulo θ e seja P o ponto em que a semi-recta correspondente encontra o arco de circunferência de centro O

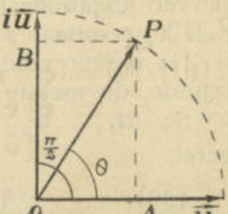


Fig. 30

e raio igual a *mod* **u**. Tirando PA e PB perpendiculares às linhas de acção de **u** e $i(\mathbf{u})$, têm-se os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$, $mod\,\overrightarrow{OP}=mod\,\mathbf{u}$.

Por outro lado, é [7, 39)] $\overrightarrow{OA}=\lambda.\mathbf{u}$, $\lambda=\varepsilon\dfrac{mod\,\overrightarrow{OA}}{mod\,\mathbf{u}}$;

mas $mod\,\overrightarrow{OA}=mod\,\overrightarrow{OP}.|\cos\theta|=mod\,\mathbf{u}.|\cos\theta|$ e o sinal de ε coincide com o de $\cos\theta$, de modo que se tem $\lambda=\cos\theta$; do mesmo modo se conclue que $\overrightarrow{OB}=\mu.i(\mathbf{u})$ com $\mu=sen\,\theta$.

É, portanto, $\overrightarrow{OP}=\cos\theta.\mathbf{u}+sen\,\theta.i(\mathbf{u})=e^{i\theta}(\mathbf{u})$ isto é, *a aplicação, ao vector* **u**, *do operador* $e^{i\theta}$ *consiste na rotação de* **u**, *de amplitude* θ, *feita no plano normal a* **e** *e no sentido directo, se o vector* **e** *é orientado como foi dito.*

Com isto, fica justificado o nome de *operador de rotação geral*.

É claro que se $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ se tem $e^{i\theta}(\mathbf{u})=i(\mathbf{u})$ e, na fig. 30, $\overrightarrow{OP}$ coincide com $i(\mathbf{u})$ de modo que o operador anterior é um caso particular dêste.

Propriedades. 1.ª — *O operador* $e^{i\theta}$ *é um operador linear.* As igualdades $e^{i\theta}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=e^{i\theta}(\mathbf{u})+e^{i\theta}(\mathbf{v})$ e $e^{i\theta}(\rho.\mathbf{u})=\rho.e^{i\theta}(\mathbf{u})$ que, conforme 130), estabelecem a *linearidade* do operador, são imediatas a partir da significação geométrica — se aos vectores **u** e **v** se dá, no plano por êles definido, uma rotação de amplitude θ, no mesmo sentido, dessa mesma amplitude e no mesmo sentido roda a sua soma.

Do mesmo modo, se **u** roda dum certo ângulo, num certo sentido, do mesmo ângulo e no mesmo sentido roda $\rho.\mathbf{u}$.

Se $\mathbf{u}_1,\ldots\mathbf{u}_n$ são vectores do mesmo plano, tem-se, em geral,

$$139)\qquad e^{i\theta}\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.\mathbf{u}_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.e^{i\theta}(\mathbf{u}_k).$$

2.ª — *É* 140) $e^{i(\theta+2k\pi)}(\mathbf{u})=e^{i\theta}(\mathbf{u})$.

Efectivamente, os resultados das rotações sôbre um vector, feitas no mesmo plano e no mesmo sentido e diferindo por um múltiplo inteiro de 2π, coincidem.

3.ª — É 141) $e^{i\theta}[e^{i\alpha}(\mathbf{u})] = e^{i(\theta+\alpha)}(\mathbf{u})$.

É, geomètricamente, evidente.

Mais geralmente, tem-se

142) $e^{i\theta_1}\left[e^{i\theta_2}[\ldots e^{i\theta_n}(\mathbf{u})]\right] = e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}(\mathbf{u})$.

Daqui parte-se para a definição das potências sucessivas do operador de rotação geral. Definindo $(e^{i\theta})^2$ pela igualdade $(e^{i\theta})^2(\mathbf{u}) = e^{i\theta}[e^{i\theta}(\mathbf{u})]$ e, em geral, $(e^{i\theta})^n$ pela igualdade $(e^{i\theta})^n(\mathbf{u}) = e^{i\theta}[(e^{i\theta})^{n-1}(\mathbf{u})]$ tem-se de 141) e 142)

143) $(e^{i\theta})^n(\mathbf{u}) = e^{in\theta}(\mathbf{u})$.

As propriedades estabelecidas mostram que o operador de rotação geral gosa das propriedades formais dos números complexos $e^{i\theta}$ $(i^2 = -1)$.

4.ª — É 144) $e^{i\theta}(\mathbf{u}) \mid e^{i\theta}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \mid \mathbf{v}$

e 145) $e^{i\theta}(\mathbf{u}) \wedge e^{i\theta}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Estas duas propriedades são, ainda, imediatas a partir da significação geométrica do operador.

Tanto destas, como das anteriores propriedades, são fáceis, se bem que menos imediatas, as demonstrações analíticas.

III. — MOMENTOS

19. — Momento dum vector deslizante em relação a um ponto. Consideremos uma recta R) e um vector *fixo* [6] $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ sôbre ela (fig. 31); seja O um ponto do espaço fora da recta R). Chama-se *momento* $\mathbf{m}$ do vector fixo $\mathbf{u}$ em relação ao ponto O, ao producto vectorial

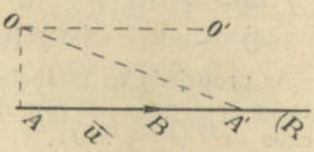


Fig. 31

$$146)\quad \mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u}.$$

Propriedades. 1.ª — *O momento* $\mathbf{m}$ *não se altera quando o vector* $\mathbf{u}$ *sofre uma translacção, de amplitude qualquer, ao longo da recta* R).

Demos, com efeito, a $\mathbf{u}$ a translacção AA' ao longo de R), isto é, consideremos o vector $\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{u}$; o seu momento em relação a O é $\mathbf{m}' = \overrightarrow{OA'} \wedge \mathbf{u} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}) \wedge \mathbf{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u} + \overrightarrow{AA'} \wedge \mathbf{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{m}$ em virtude de **11**, 70).

Resulta daqui imediatamente que *o momento se pode definir* para o vector $\mathbf{u}$, sôbre R), independentemente da sua localização sôbre R) isto é, *para o vector deslizante ou vector ligado à base* R) [6].

Representaremos por $(\mathbf{u}, R)$ o vector deslizante $\mathbf{u}$ sôbre R) — o momento de $(\mathbf{u}, R)$ em relação a O é definido por 146).

2.ª — *O momento do vector deslizante* $(\mathbf{u}, R)$ *em relação a O não se altera quando O se desloca sôbre uma recta paralela a* R).

Com efeito, se O toma a posição O' sôbre a recta paralela a R), não há mais que dar a $\mathbf{u}$ uma translacção sôbre R) de modo que a nova origem A_1 satisfaça a $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OO'}$ e é então evidente que $\overrightarrow{O'A} \wedge \mathbf{u} = \overrightarrow{O'A_1} \wedge \mathbf{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{m}$.

3.ª — *O momento de* $(\mathbf{u}, R)$ *em relação a O anula-se sempre que e só quando* $\mathbf{u}$ *é nulo ou O está sôbre R).*

É conseqüência imediata das propriedades do produto vectorial [11, 5.ª].

4.ª — *Coordenadas cartesianas do momento.* Prendamos ao ponto O (fig. 31) um sistema cartesiano rectangular e sejam, nesse sistema, x_1, x_2, x_3 as coordenadas de A e $\mathbf{u} = X_1 . \mathbf{i}_1 + X_2 . \mathbf{i}_2 + X_3 . \mathbf{i}_3$; como é $\overrightarrow{OA} = x_1 . \mathbf{i}_1 + x_2 . \mathbf{i}_2 + x_3 . \mathbf{i}_3$, tem-se para decomposição cartesiana de $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = L_1 . \mathbf{i}_1 + L_2 . \mathbf{i}_2 + L_3 . \mathbf{i}_3$$

com

$$147) \quad L_1 = x_2X_3 - x_3X_2, \quad L_2 = x_3X_1 - x_1X_3, \quad L_3 = x_1X_2 - x_2X_1 .$$

Momento resultante dum sistema. Seja $(\mathbf{u}_1, R_1) = \overrightarrow{A_1B_1}$, $(\mathbf{u}_2, R_2) = \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots (\mathbf{u}_n, R_n) = \overrightarrow{A_nB_n}$ um sistema de vectores deslizantes e O um ponto do espaço. Seja ainda $\mathbf{m}_i = \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}$ o momento do vector deslizante $(\mathbf{u}_i, R_i)$ em relação a O. Chama-se momento resultante do sistema em relação ao ponto O ao vector $\overrightarrow{OG}$ definido pela igualdade

$$148) \quad \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}.$$

É evidente, em virtude da primeira das propriedades anteriores, que *o momento resultante não se altera quando qualquer dos vectores do sistema desliza ao longo da sua linha de acção.*

Quando, porém, se muda o ponto O, o momento resultante altera-se, e tem-se $\overrightarrow{O'G} = \Sigma \mathbf{m}'_i = \Sigma \overrightarrow{O'A_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}$. Mas $\overrightarrow{O'A_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}$, logo $\overrightarrow{O'G} = \Sigma(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) \wedge \overrightarrow{A_iB_i} =$

$$= \Sigma \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} + \Sigma \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{O'O} \wedge \Sigma \overrightarrow{A_iB_i} +$$

$$+ \Sigma \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} \quad \text{isto é,}$$

149) $$\overrightarrow{O'G} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{O'O} \wedge \Sigma \overrightarrow{A_iB_i}.$$

Resulta desta igualdade que *o momento resultante do sistema em relação a qualquer ponto do espaço é conhecido desde que se conheça:* a) *o momento resultante em relação a um ponto O;* b) *a soma* $\Sigma \overrightarrow{A_iB_i}$ *dos vectores do sistema.*

20. — **Coordenadas dum vector deslizante.**

a) **Coordenadas vectoriais.** Seja o vector deslizante $(\mathbf{u}, R)$; vamos ver que *êle é determinado:* a) *pelo vector livre* $\mathbf{u}$, *não nulo;* b) *pelo momento* $\mathbf{m}$ *em relação a um ponto O não pertencente a* R).

Com efeito:

I. — O vector livre $\mathbf{u}$ determina a direcção, o sentido e o módulo de $(\mathbf{u}, R)$ e também a direcção de R); falta apenas determinar a *posição* de R).

II. — O momento $\mathbf{m}$ determina: 1.º, o plano que passa por O e R) (que é perpendicular a $\mathbf{m}$, logo, a direcção de $\mathbf{m}$ determina o plano sôbre o qual existe R); 2.º, a área S do triângulo OAB (fig. 32), visto que [12, 84)] $mod\,\mathbf{m} = 2S$ e daqui resulta, por ser

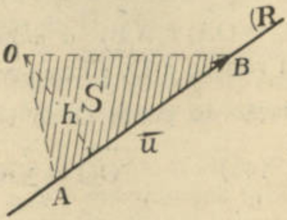


Fig. 32

$$2S = mod\,\mathbf{u} \cdot h, \quad h = \frac{mod\,\mathbf{m}}{mod\,\mathbf{u}}$$

ficando portanto determinada a distância de O à recta R) no plano perpendicular a $\mathbf{m}$; falta apenas determinar, por conseqüência, qual o lado, a contar de O, no qual se encontra R), o qual depende do sentido da orientação da distância h; êste é determinado pelo sentido de $\mathbf{m}$, visto que o triedro $\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$, por esta ordem, deve ter a disposição do triedro fundamental.

Definição. — Os dois vectores $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{m}$ *que, como acabamos de ver, determinam o vector deslizante* $(\mathbf{u}, R)$ *chamam-se as suas coordenadas vectoriais em relação ao ponto O.*

b) **Divisão vectorial.** Com o problema das coordenadas vectoriais dum $(\mathbf{u}, R)$ prende-se o da chamada *divisão vectorial*. Passa-se o seguinte: todo o vector deslizante $(\mathbf{u}, R)$ é determinado unìvocamente por um vector livre $\mathbf{u}$ e outro vector $\mathbf{m}$, perpendicular a $\mathbf{u}$, ligados êstes dois pela relação 146) $\mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u}$.

Pode agora pôr-se a questão sob esta forma — *dado um vector livre* $\mathbf{u}$ *e outro vector* $\mathbf{m}$ *perpendicular a* $\mathbf{u}$, *determinar o vector* $\mathbf{x}$, *tal que* $\mathbf{m} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}$. Trata-se, como se vê, da possibilidade de resolver o problema inverso do da multiplicação vectorial, problema cuja solução não tem interêsse se $\mathbf{m}$ e $\mathbf{u}$ são quaisquer [11, 7.ª], mas que no nosso caso ($\mathbf{m}$ perpendicular a $\mathbf{u}$) admite solução símples, se bem que indeterminada. Verifica-se, efectivamente, que satisfaz à igualdade

$\mathbf{m} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}$ o vector $\mathbf{x} = \dfrac{1}{\mathbf{u}|\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{m}$.

De facto, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{u} = \dfrac{1}{\mathbf{u}|\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{m}) \wedge \mathbf{u} = -\dfrac{1}{\mathbf{u}|\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{m}) =$

$$= -\frac{1}{\mathbf{u}|\mathbf{u}} [\mathbf{u}\,|\,\mathbf{m} \,.\, \mathbf{u} - \mathbf{u}\,|\,\mathbf{u} \,.\, \mathbf{m}] = \mathbf{m} \,.$$

É claro que, se $\mathbf{x}_1$ é solução, é-o também $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + k \,.\, \mathbf{u}$ (k número real qualquer) visto que, então, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{u} + k \,.\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{u}$. Na fig. 31, $\mathbf{x}_1$ é o vector $\overrightarrow{OA}$; $k \,.\, \mathbf{u}$, coplanar a $\mathbf{u}$ e portanto vector de R) por ser $\mathbf{u}$ deslizante, é o vector $\overrightarrow{AA'}$, correspondente à translacção arbitrária de que $\mathbf{u}$ é susceptível sôbre R); $\mathbf{x}$ è o vector $\overrightarrow{OA'}$.

Pode, em resumo, dizer-se que

$$150)\qquad \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{u}|\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{m} + k \cdot \mathbf{u}$$

é a solução geral do problema da divisão vectorial.

c) **Coordenadas cartesianas.** Chamam-se *coordenadas cartesianas* dum vector deslizante ($\mathbf{u}$, R) às coordenadas cartesianas das suas duas coordenadas vectoriais $\mathbf{u}$ e $\mathbf{m}$. São portanto [19, 147)] $X_1, X_2, X_3, L_1, L_2, L_3$.

Estes seis números são ligados pela relação

$$151)\qquad L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 = 0$$

visto $\mathbf{u}$ e $\mathbf{m}$ serem perpendiculares.

Das seis coordenadas cartesianas dum vector deslizante ($\mathbf{u}$, R) só cinco são, portanto, independentes.

21. — **Momento dum vector deslizante em relação a um eixo.** Seja o vector deslizante ($\mathbf{u}$, R), H) um eixo de vector unitário $\mathbf{e}$, e O um ponto dêsse eixo. Seja ainda $\mathbf{m} = \overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u}$ o momento de ($\mathbf{u}$, R) em relação a O, e construa-se

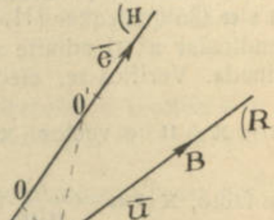


Fig. 15

$$152)\qquad m = \mathbf{e}\,|\,\mathbf{m} = \mathbf{e}\,|\,\overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u}.$$

O escalar m goza das seguintes propriedades:

1.ª — *É independente da posição de* $\mathbf{u}$ *sôbre R).* É conseqüência imediata de 19, prop. 1.ª.

2.ª — *É independente da posição do ponto O sôbre H).* Tomemos, com efeito, outro ponto O', sôbre H) e seja $m' = \mathbf{e}\,|\,\overrightarrow{O'A} \wedge \mathbf{u}$. Como $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA}$, tem-se $m' = \mathbf{e}\,|\,(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{e}\,|\,\overrightarrow{OA} \wedge \mathbf{u} - \mathbf{e}\,|\,\overrightarrow{OO'} \wedge \mathbf{u} = m$ [15, prop. 4.ª].

Definição. O escalar m diz-se *momento* do vector deslizante ($\mathbf{u}$, R) em relação ao eixo H).

Da definição 152) resulta imediatamente que

3.ª — *O momento m é a projecção, sôbre H), do momento de* (**u**, R) *em relação a qualquer ponto de H).*

Desta propriedade resulta ainda

4.ª — *Os momentos dum* (**u**, R) *em relação aos eixos coordenados* $Ox_1x_2x_3$ *são* $m_1 = L_1$, $m_2 = L_2$, $m_3 = L_3$ [19, 147)].

Efectivamente, o momento de (**u**, R) em relação à origem dos eixos (ponto que pertence aos três eixos) é $\mathbf{m} = L_1 \,.\, \mathbf{i}_1 + L_2 \,.\, \mathbf{i}_2 + L_3 \,.\, \mathbf{i}_3$ e as projecções dêste vector, ou sejam as suas próprias coordenadas, $L_1 = \mathbf{m} \,|\, \mathbf{i}_1, \ldots$, são, pela prop. 3.ª, os momentos em relação aos eixos coordenados.

22. — Bibliografia.

Max Lagally — *Vorlesungen über Vektor-Rechnung.* Leipzig, 1928.

C. E. Weatherburn — *Elementary Vector Analysis.* Londres, 1935.

C. Burali-Forti e R. Marcolongo — *Éléments de Calcul Vectoriel.* (tradução francesa). Paris, 1910.

A. Chatelet e J. Kampé de Fériet — *Calcul Vectoriel.* Paris, 1924.

G. Bouligand — *Leçons de Géométrie Vectorielle.* Paris, 1924.

G. Juvet — *Leçons d'Analyse Vectorielle.* Vol. I. Paris, 1933.

Siegfried Valentiner — *Vektoranalysis.* Leipzig, 1929.

G. Bouligand e G. Rabaté — *Initiation aux Méthodes Vectorielles.* Paris, 1926.

P. Nillus — *Leçons de Calcul Vectoriel.* Paris, 1931.

R. Bricard — *Le Calcul Vectoriel.* Paris, 1929.

Exercícios

1. — Dados os dois vectores livres $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, determinar:

a) a decomposição cartesiana do vector $\overrightarrow{PQ}$ e os seus cosenos directores;

b) a projecção de $\overrightarrow{PQ}$ sôbre o vector do plano Oxy que faz com os eixos Ox e Oy, respectivamente, os ângulos 30° e 60°;

c) a área do triângulo OPQ.

2. — Verificar as igualdades

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) . \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \mid (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = 2\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \mid \mathbf{w} .$$

3. — Calcular o quadrado do produto mixto de três vectores. ¿ Em que se transforma o resultado quando os vectores são triortogonais ?

4. — Verificar que

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \mid (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \wedge \mathbf{w})^2 .$$

5. — Verificar as seguintes propriedades do operador $e^{i\theta}$:

a) $\mathbf{u} \mid e^{i\theta}(\mathbf{u}) = \cos\theta . (mod\, \mathbf{u})^2$

b) $\mathbf{u} \wedge e^{i\theta}(\mathbf{u}) = sen\, \theta . (mod\, \mathbf{u})^2 . \mathbf{e}$

c) $e^{i\theta}(\mathbf{u}) \mid e^{i\alpha}(\mathbf{u}) = \cos(\theta - \alpha) . (mod\, \mathbf{u})^2$

d) $e^{i\theta}(\mathbf{u}) \wedge e^{i\alpha}(\mathbf{u}) = sen\, (\alpha - \theta) . (mod\, \mathbf{u})^2 . \mathbf{e} .$

6. — Demonstrar vectorialmente que as diagonais dum paralelogramo se cortam ao meio.

7. — Demonstrar que a soma dos vectores determinados pelas três medianas dum triângulo (origens nos vértices) é nula.

8. — Seja O um ponto fixo, **u** e **v** dois vectores constantes com origem nesse ponto, P e Q as suas extremidades, e **r** o vector variável de origem em O, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Mostrar que a esfera cujo diâmetro é PQ tem por equação $(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \mid (\mathbf{r} - \mathbf{v}) = o$.

CAPÍTULO II

ÁLGEBRA TENSORIAL

I. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

1. — Transformações de coordenadas cartesianas.

Posição do problema. O problema da transformação de coordenadas, de grande importância em tudo que vai seguir-se, consiste no seguinte — dado um sistema (S) de eixos cartesianos $Oxyz$ e as coordenadas (x, y, z) dum ponto qualquer M do espaço, determinar as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do mesmo ponto M em relação a outro sistema $(\bar{S})$ de eixos $\bar{O}\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, isto é, calcular $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ em função de x, y, z e vice-versa, na hipótese de que a posição do ponto M não varia mas, apenas, o sistema de referência do espaço.

Suporemos, em primeiro logar, que os sistemas (S) e $(\bar{S})$ são ambos rectangulares e depois consideraremos o caso mais geral de (S) e $(\bar{S})$ serem quaisquer.

Para obter maior simetria nas fórmulas a que se chegar, representaremos, como habitualmente, os eixos do sistema (S) por Ox_1, Ox_2, Ox_3 e os do sistema $(\bar{S})$ por $O\bar{x}_1$, $O\bar{x}_2$, $O\bar{x}_3$; os vectores unitários dos eixos serão representados, respectivamente, por $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ e $\bar{\mathbf{i}}_1$, $\bar{\mathbf{i}}_2$, $\bar{\mathbf{i}}_3$.

Resolução do problema. *1.º caso:* (S) e $(\bar{S})$ *triortogonais.* Os dois sistemas terão, em geral, além de direcções diferentes dos eixos, também origens diferentes mas, para simplificar a questão, podemos supôr que as origens coïncidem; se isso não se desse, não haveria mais que tomar um sistema intermédio (S') com a origem do segundo e eixos paralelos ao primeiro, isto é, o sistema que se deduz de (S) por uma translacção da origem determinada pelo vector $\overrightarrow{O\bar{O}}$. É claro que se um ponto M tem no sistema (S') as coordenadas (x'_1, x'_2, x'_3) êle têm, no primitivo sistema (S) as coordenadas

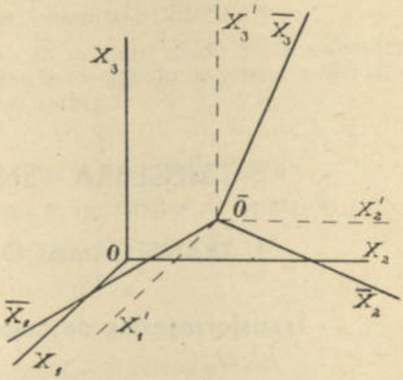


Fig. 54

$$1) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1 + x'_1 \\ x_2 = \lambda_2 + x'_2 \\ x_3 = \lambda_3 + x'_3 \end{cases}$$

se chamarmos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ às coordenadas de $\bar{O}$ em relação ao sistema (S).

Feita, por conseqüência, esta transformação prévia de coordenadas, ficamos apenas com os dois sistemas (S') e $(\bar{S})$ com a mesma origem, mantendo-se, entre êles, as mesmas relações direccionais que existiam entre (S) e $(\bar{S})$.

Suporemos, portanto, em tudo o que vai seguir-se, que as origens de (S) e $(\bar{S})$ coïncidem.

Sejam, então, os dois sistemas da figura 35, o ponto M de coordenadas (x_1, x_2, x_3) em (S) e $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ em $(\bar{S})$ e procuremos as relações que ligam os x_i aos $\bar{x}_i$.

O vector $\overrightarrow{OM}$ tem, no sistema (S), a decomposição cartesiana $\overrightarrow{OM} = x_1 . \mathbf{i}_1 + x_2 . \mathbf{i}_2 + x_3 . \mathbf{i}_3$ e, no sistema $(\overline{S})$, $\overrightarrow{OM} = \overline{x}_1 . \overline{\mathbf{i}}_1 + \overline{x}_2 . \overline{\mathbf{i}}_2 + \overline{x}_3 . \overline{\mathbf{i}}_3$.

Ora, como por hipótese, o ponto M, e por conseqüência

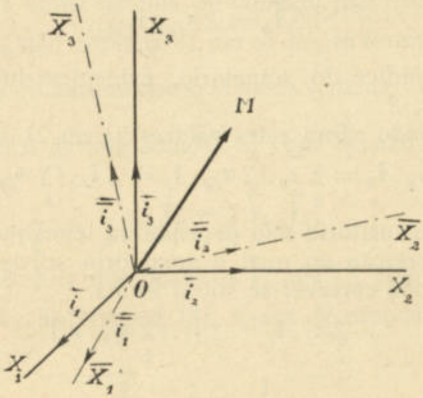


Fig. 35

o vector $\overrightarrow{OM}$, não mudou, mas simplesmente o sistema de referência, deverá ser

2) $$\sum_k x_k . \mathbf{i}_k = \sum_k \overline{x}_k . \overline{\mathbf{i}}_k$$

e para que desta relação se tirem os x_k em função dos $\overline{x}_k$ não há mais que exprimir os vectores $\overline{\mathbf{i}}_k$ nos $\mathbf{i}_k$, isto é, decompôr os vectores unitários do novo sistema $(\overline{S})$ no primitivo sistema (S).

Ora as coordenadas (coeficientes da decomposição cartesiana) dos vectores unitários são [**1**, **9**, 52)] os cosenos dos ângulos que os vectores formam com os eixos coordenados, logo se fizermos

3) $$\alpha_{ik} = \cos(x_i, \overline{x}_k) \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

ter-se há

$$
4) \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{i}}_1 = \alpha_{11} \cdot \mathbf{i}_1 + \alpha_{21} \cdot \mathbf{i}_2 + \alpha_{31} \cdot \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 = \alpha_{12} \cdot \mathbf{i}_1 + \alpha_{22} \cdot \mathbf{i}_2 + \alpha_{32} \cdot \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{i}}_3 = \alpha_{13} \cdot \mathbf{i}_1 + \alpha_{23} \cdot \mathbf{i}_2 + \alpha_{33} \cdot \mathbf{i}_3 \end{cases}
$$

isto é

$$
5) \qquad \bar{\mathbf{i}}_k = \sum_j \alpha_{jk} \cdot \mathbf{i}_j \qquad k = 1, 2, 3
$$

tomando o índice do somatório, evidentemente, também os valores *1, 2, 3*.

Substituindo agora estes valores 5) em 2), tem-se

$$
\sum_k x_k \cdot \mathbf{i}_k = \sum_k \bar{x}_k \cdot \sum_j \alpha_{jk} \cdot \mathbf{i}_j = \sum_j \mathbf{i}_j \cdot (\sum_k \alpha_{jk} \cdot \bar{x}_k)
$$

e como um somatório não depende da letra que representa o índice em relação ao qual o somatório se desenvolve, esta igualdade pode escrever-se sob a forma

$$
\sum_j x_j \cdot \mathbf{i}_j = \sum_j \mathbf{i}_j \cdot (\sum_k \alpha_{jk} \cdot \bar{x}_k) \, ,
$$

donde

$$
6) \qquad x_j = \sum_k \alpha_{jk} \cdot \bar{x}_k \qquad j = 1, 2, 3,
$$

fórmulas que resolvem o problema.

2.º caso: (S) *e* ($\bar{\text{S}}$) *não triortogonais.*

Como se sabe [**1**, *7*] três vectores *não coplanares* quaisquer podem servir de base para a decomposição de um vector qualquer do espaço. Se tomarmos três vectores quaisquer nessas condições $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, com origem comum O; como *eixos coordenados* as três rectas Ox_1, Ox_2, Ox_3 sôbre as quais êles se encontram e orientadas como êles, e como *planos coordenados* os planos definidos por êsses eixos dois a dois, teremos um *sistema de referência cartesiano não rectangular* $Ox_1\, x_2\, x_3$ em relação ao qual as coordenadas dum ponto serão as distâncias aos planos coordenados, medidas não já nas perpendiculares aos planos mas, sim, sôbre as paralelas aos eixos; e essas coordenadas são únicas porque as decomposições são únicas [**1**, *7* e *9*]. Se o ponto M tiver, nesse sistema (S), as coordenadas x_1, x_2, x_3, o vector $\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}$ tem [**1**, *7*, 45)] a decomposição

$$\mathbf{u} = \sum_k x_k . \mathbf{i}_k$$

exactamente como se passa num sistema rectangular.

Dado agora outro sistema $(\overline{S})$ também não triortogonal, de base $\overline{\mathbf{i}}_1$, $\overline{\mathbf{i}}_2$, $\overline{\mathbf{i}}_3$ não coplanares, ter-se-há, se forem $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ as coordenadas do mesmo ponto M nesse sistema, $\mathbf{u} = \sum_k \overline{x}_k . \overline{\mathbf{i}}_k$ e, para relacionar as coordenadas x_k com $\overline{x}_k$, não há mais que, na igualdade

$$\sum_k x_k . \mathbf{i}_k = \sum_k \overline{x}_k . \overline{\mathbf{i}}_k ,$$

introduzir as relações que ligam os $\overline{\mathbf{i}}_k$ aos $\mathbf{i}_k$, isto é, as decomposições dos $\overline{\mathbf{i}}_k$ no sistema (S). Essas decomposições são da forma

$$7) \qquad \overline{\mathbf{i}}_k = \sum_j c_{jk} . \mathbf{i}_j \qquad k = 1, 2, 3$$

que, introduzidas na igualdade acima, nos dão, por um raciocínio análogo ao que atraz fizemos,

$$8) \qquad x_j = \sum_k c_{jk} . \overline{x}_k \qquad j = 1, 2, 3.$$

Tudo se passa, portanto, como no caso de os sistemas serem triortogonais, à parte a significação dos coeficientes c_{jk} que lá eram os cosenos directores dos vectores unitários do sistema $(\overline{S})$ e que aqui deixam de o ser porque essa propriedade desaparece desde que o sistema de referência deixe de ser triortogonal.

É claro que as relações 5) e 6) são, respectivamente, casos particulares de 7) e 8); para as distinguirmos, representaremos, daqui em diante, a transformação geral 8) por T_l e a transformação de coordenadas 6) por T_m (a razão do uso dêstes índices será adiante explicada) de modo que sempre que nos referirmos a T_l e T_m entender-se hão, respectivamente, as transformações de coordenadas

$$T_l) \qquad x_j = \sum_k c_{jk} \cdot \bar{x}_k \qquad j = 1, 2, 3$$

$$T_m) \qquad x_j = \sum_k \alpha_{jk} \cdot \bar{x}_k \qquad j = 1, 2, 3.$$

Estas fórmulas de transformação de coordenadas vão constituir o ponto de partida de explorações em dois domínios diferentes — no primeiro, ocupar-nos hemos essencialmente do seu significado geométrico, no segundo daremos atenção especial ao seu carácter analítico.

Antes de iniciar o estudo em cada um dêsses domínios, fixemos desde já o carácter linear de T_l e T_m: as duas transformações consistem na efectivação duma *substituïção linear homogénea* sôbre os x_i:

$$T_l) \begin{cases} x_1 = c_{11} \cdot \bar{x}_1 + c_{12} \cdot \bar{x}_2 + c_{13} \cdot \bar{x}_3 \\ x_2 = c_{21} \cdot \bar{x}_1 + c_{22} \cdot \bar{x}_2 + c_{23} \cdot \bar{x}_3 \\ x_3 = c_{31} \cdot \bar{x}_1 + c_{32} \cdot \bar{x}_2 + c_{33} \cdot \bar{x}_3 . \end{cases}$$

Por isso se lhes dá o nome de *transformações lineares*.
Chama-se *matriz* desta transformação linear à matriz

$$D = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}$$

da substituïção linear homogénea sôbre os x_i, e chama-se *módulo* da transformação linear ao *determinante associado* [1] a esta matriz

9) $$\vartheta(D) = |c_{jk}|.$$

Como se vê, [7)] as colunas da matriz são constituídas pelas coordenadas dos vectores unitários do sistema $(\bar{S})$ em

(1) V. *Lições*, vol. 1.º, **3, 29.**

relação a (S) e daqui resulta que o *módulo* $\theta(D)$ *é, necessàriamente, diferente de zero.*

Efectivamente, se fôsse $\theta(D)=0$, haveria a mesma relação linear e homogénea entre os elementos das linhas e os três vectores $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ seriam linearmente dependentes, logo coplanares [**1**, 7] contra a hipótese.

2\. — **O ponto de vista da geometria afim.** A transformação linear T_1 a que se chegou no parágrafo anterior — transformação das coordenadas dum mesmo ponto em dois sistemas diferentes de coordenadas com a mesma origem — pode ser encarada dum outro ponto de vista. Consiste êle em considerar essa transformação como dando, *num mesmo sistema fundamental de coordenadas*, as relações existentes entre as coordenadas de dois pontos.

Consiste, como se vê, êste critério em deduzir, do espaço dado, e partindo de um dado sistema de coordenadas cartesianas, *um novo espaço* cujos pontos têm coordenadas definidas em função das do primeiro pela transformação T_1. O estudo das propriedades dêsse novo espaço é o objecto da *geometria afim.*

É claro que o ponto de coordenadas nulas no primitivo espaço é também o ponto de coordenadas nulas no espaço definido pela transformação linear T_1; efectivamente, para $\bar{x}_i=0$ vem $x_i=0$ e, recìprocamente, o sistema

$$T_1 \left\{ \begin{aligned} x_1 &= c_{11}\,.\,\bar{x}_1 + c_{12}\,.\,\bar{x}_2 + c_{13}\,.\,\bar{x}_3 \\ x_2 &= c_{21}\,.\,\bar{x}_1 + c_{22}\,.\,\bar{x}_2 + c_{23}\,.\,\bar{x}_3 \\ x_3 &= c_{31}\,.\,\bar{x}_1 + c_{32}\,.\,\bar{x}_2 + c_{33}\,.\,\bar{x}_3 \end{aligned} \right.$$

dá para $x_1=x_2=x_3=0$ a solucão única $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\bar{x}_3=0$ visto que é, então, um sistema homogéneo de determinante $\theta(D)=|c_{jk}|\neq 0$.

Resulta daqui que a transformação linear T_1, fazendo corresponder a cada ponto um novo ponto, faz, afinal, corresponder a cada vector livre (que pode sempre supôr-se ter origem na origem dos eixos) um novo vector livre; isto é, T_l define uma nova multiplicidade vectorial, a ***multiplicidade vectorial afim***, cujo estudo é objecto da geometria afim.

Pelo que se viu, a correspondência dum vector ao seu correspondente do espaço afim é definida, afinal, pela matriz $D=((c_{jk}))$ da transformação linear; dos seus elementos c_{jk}, e só deles, dependem os novos vectores. A matriz $D=((c_{jk}))$ pode ser portanto encarada como um *operador*, agente da transformação dum vector noutro vector. Representaremos essa acção do operador D pela notação

$$D(\mathbf{V})=\overline{\mathbf{V}};$$

ela significa que o operador D faz corresponder ao vector $\mathbf{V}$ o vector $\overline{\mathbf{V}}$ efectuando sôbre as coordenadas de $\mathbf{V}$ a substituïção linear T_l.

Como propriedade importante dêste operador, tem-se que: *O operador* $D=((c_{jk}))$ *é linear.*

Para o ver tem que provar-se [**1, 18**] que

$$D(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)=D(\mathbf{V}_1)+D(\mathbf{V}_2)$$
$$D(\rho\,.\,\mathbf{V}_1)=\rho\,.\,D(\mathbf{V}_1).$$

Sejam $\quad \mathbf{V}_1=\sum_k x_k\,.\,\mathbf{i}_k \quad \mathbf{V}_2=\sum_k y_k\,.\,\mathbf{i}_k \quad$ donde $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2=\sum_k (x_k+y_k)\,.\,\mathbf{i}_k$. Fazendo a transformação linear T_l sôbre os x_k e os y_k tem-se [1, 8)]

$$D(\mathbf{V}_1)=\sum_k(\sum_j c_{kj}\,.\,\overline{x}_j)\,\mathbf{i}_k, \qquad D(\mathbf{V}_2)=\sum_k(\sum_j c_{kj}\,.\,\overline{y}_j)\,.\,\mathbf{i}_k \qquad \text{e}$$

$$D(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)=\sum_k(\sum_j c_{kj}\,.\,\overline{x}_j+\sum_j c_{kj}\,.\,\overline{y}_j)\,.\,\mathbf{i}_k=\sum_k\sum_j c_{kj}(\overline{x}_j+\overline{y}_j)\,.\,\mathbf{i}_k$$
$$=D(\mathbf{V}_1)+D(\mathbf{V}_2).$$

Por outro lado, é $\rho\,.\,\mathbf{V}_1=\sum_k(\rho\,.\,x_k)\,.\,\mathbf{i}_k$, donde

$$D(\rho\,.\,\mathbf{V}_1)=\sum_k[\sum_j c_{kj}\,.(\rho\,\overline{x}_j)]\,.\,\mathbf{i}_k=\rho\,.\sum_k(\sum_j c_{kj}\,.\,\overline{x}_j)\,.\,\mathbf{i}_k=\rho\,.\,D(\mathbf{V}_1)$$

com o que fica demonstrada a linearidade do operador D. Daqui resulta que, em geral, é

10) $$D(\sum_i \rho_i . \mathbf{V}_i) = \sum_i \rho_i . D(\mathbf{V}_i).$$

Por estas propriedades se pode já antever o papel importante que a teoria das matrizes é chamada a desempenhar no estudo das transformações lineares do espaço. No parágrafo seguinte serão estudadas algumas propriedades dessas transformações.

3. — **Propriedades das transformações lineares.** — Continuando a considerar a questão que nos está ocupando do ponto de vista da geometria afim, suporemos, para simplificar, e sem perda de generalidade, que temos um sistema de coordenadas cartesianas rectangulares e nêle definida a transformação linear geral

$$T_l \begin{cases} x_1 = c_{11} . \bar{x}_1 + c_{12} . \bar{x}_2 + c_{13} . \bar{x}_3 \\ x_2 = c_{21} . \bar{x}_1 + c_{22} . \bar{x}_2 + c_{23} . \bar{x}_3 \\ x_3 = c_{31} . \bar{x}_1 + c_{32} . \bar{x}_2 + c_{33} . \bar{x}_3 \end{cases}$$

e a transformação linear particular

$$T_m \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} . \bar{x}_1 + \alpha_{12} . \bar{x}_2 + \alpha_{13} . \bar{x}_3 \\ x_2 = \alpha_{21} . \bar{x}_1 + \alpha_{22} . \bar{x}_2 + \alpha_{23} . \bar{x}_3 \\ x_3 = \alpha_{31} . \bar{x}_1 + \alpha_{32} . \bar{x}_2 + \alpha_{33} . \bar{x}_3 . \end{cases}$$

Nestas duas transformações lineares os coeficientes c_{jk} e α_{jk} têm a mesma significação — as colunas do operador $D = ((c_{jk}))$ são, num e noutro caso, os cosenos directores dos vectores $\bar{\mathbf{i}}_1, \bar{\mathbf{i}}_2, \bar{\mathbf{i}}_3$ — mas as diferentes relações direccionais dêsses vectores, triortogonais em T_m e não triortogonais em T_l, produzem alterações profundas nos espaços definidos por T_l e T_m, como veremos no parágrafo seguinte.

Por agora, e como primeira propriedade das transformações lineares, vamos ver uma particularidade importante das transformações T_m.

Prop. 1.ª — O módulo da transformação T_m *é um determinante ortogonal.*

Efectivamente, no determinante

$$\theta(D) = \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

tem-se:

a) *por serem os vectores* $\overline{\mathbf{i}}_1, \overline{\mathbf{i}}_2, \overline{\mathbf{i}}_3$, *unitários* (e o sistema fundamental rectangular) donde $(mod\,\overline{\mathbf{i}}_k)^2 = 1$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1 \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

isto é,

11) $$\sum_j \alpha_{jk}^2 = 1 \qquad k = 1, 2, 3;$$

b) *por serem os mesmos vectores perpendiculares entre si dois a dois* (e o sistema fundamental rectangular) donde $\overline{\mathbf{i}}_k \mid \overline{\mathbf{i}}_l = 0$, se $k \neq l$:

$$\begin{cases} \alpha_{11} . \alpha_{12} + \alpha_{21} . \alpha_{22} + \alpha_{31} . \alpha_{32} = 0 \\ \alpha_{11} . \alpha_{13} + \alpha_{21} . \alpha_{23} + \alpha_{31} . \alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{12} . \alpha_{13} + \alpha_{22} . \alpha_{23} + \alpha_{32} . \alpha_{33} = 0 \end{cases}$$

ou seja

12) $$\sum_j \alpha_{jk} . \alpha_{jl} = 0 \qquad k, l = 1, 2, 3, \quad l \neq k.$$

As relações 11) e 12) podem conglobar-se em

13) $$\sum_j \alpha_{jk} . \alpha_{jl} = \delta_{kl} \qquad k, l = 1, 2, 3$$

as quais mostram que o determinante Δ é *ortogonal* (1).

Daqui se conclue imediatamente, pelas propriedades dos determinantes ortogonais, que

1.° — entre os coeficientes de T_m se verificam, além de 13), também as relações

(1) V. *Lições*, Vol. 1.°, **3, 27**, 61).

14) $$\sum_j \alpha_{kj} \cdot \alpha_{lj} = \delta_{kl} \qquad k, l = 1, 2, 3;$$

2.° — o módulo de T_m só é susceptível de tomar os valores $+1$ e -1.

Pelo facto de o módulo de T_m ser um determinante ortogonal, a estas transformações dá-se o nome de *transformações ortogonais*. Elas gozam de propriedades importantes como veremos.

Antes de prosseguir, salientemos que as transformações lineares gerais T_l não são ortogonais, por lhes faltarem as relações 12) de perpendicularidade dos vectores $\bar{\mathbf{i}}_j$. O módulo destas transformações é sempre diferente de zero, como se viu no final do parágrafo 1, mas não ortogonal se elas não forem da forma T_m.

Produto de transformações lineares. Chamaremos *produto* de duas transformações lineares: T_l, de operador $D = ((c_{jk}))$, e T'_l, de operador $D' = ((c'_{jk}))$, ao resultado obtido pela efectivação sucessiva das duas transformações. Isto é, se por T_l se efectua a passagem dos x_j aos $\bar{x}_k$ pelas relações $x_j = \sum_k c_{jk} \cdot \bar{x}_k$ e por T'_l a passagem dos $\bar{x}_k$ a outras coordenadas $\bar{\bar{x}}_l$ pelas relações $\bar{x}_k = \sum_l c'_{kl} \cdot \bar{\bar{x}}_l$, chama-se *produto* à passagem dos x_j aos $\bar{\bar{x}}_l$ por

$$x_j = \sum_k c_{jk} \cdot \sum_l c'_{kl} \cdot \bar{\bar{x}}_l$$

relação que pode escrever-se

15) $$x_j = \sum_l r_{jl} \cdot \bar{\bar{x}}_l \qquad j = 1, 2, 3$$

com

16) $$r_{jl} = \sum_k c_{jk} \cdot c'_{kl}.$$

Daqui se conclue que o resultado do *produto* é uma nova transformação linear T''_l definida por 15) e produzida pelo operador

$$D'' = ((r_{jl})) = ((\sum_k c_{jk} \cdot c'_{kl}))$$

que é[1] o produto dos dois operadores D e D'. Assim, a operação do produto de duas transformações lineares reduz-se à do produto dos dois operadores correspondentes, o que tem a enorme vantagem de trazer para aqui tôda a aparelhagem formal do produto de matrizes; assim a operação é *associativa* (uma vez definido, como habitualmente, o produto de mais de duas substituïções) e, em geral, *não comutativa*; além disso, o determinante associado do produto (módulo) é igual ao produto dos determinantes associados dos factores. Pode, pois, enunciar-se a

Prop. 2.ª — O produto de transformações lineares é uma transformação linear; a operação goza da propriedade associativa e em geral não da comutativa; o módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos factores.

Daqui resulta, pelo facto de o produto de determinantes ortogonais ser um determinante ortogonal[2]:

Corolário. — O produto de duas transformações ortogonais é uma transformação ortogonal; se elas tiverem módulos iguais o produto tem módulo + 1, se os tiverem diferentes o produto tem módulo — 1.

Transformação inversa. Chama-se transformação *inversa* da transformação linear T_l à transformação que dela se deduz exprimindo as coordenadas $\overline{x}_k$ em função das coordenadas x_k.

O sistema

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} \cdot \overline{x}_1 + c_{12} \cdot \overline{x}_2 + c_{13} \cdot \overline{x}_3 \\ x_2 = c_{21} \cdot \overline{x}_1 + c_{22} \cdot \overline{x}_2 + c_{23} \cdot \overline{x}_3 \\ x_3 = c_{31} \cdot \overline{x}_1 + c_{32} \cdot \overline{x}_2 + c_{33} \cdot \overline{x}_3 \end{cases}$$

considerado em relação às incógnitas $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$, é compatível

(1) V. *Lições*, vol. 1.º, **3,** 32, 76).
(2) Idem, idem, **3,** 27, prop. 4.ª.

e determinado por ser o determinante do sistema (módulo de T_l) diferente de zero e tem-se[1]

17) $$\overline{x}_j = \sum_k \gamma_{jk} \cdot x_k \qquad j = 1, 2, 3$$

onde os γ_{jk} são os quocientes dos complementos algébricos dos c_{kj} (que representaremos por C_{kj}) pelo módulo:

18) $$\gamma_{jk} = \frac{C_{kj}}{\theta(D)}.$$

Tem-se, portanto, a

Prop. 3.ª — Tôda a transformação linear T_l *(módulo diferente de zero) tem uma transformação inversa que é também linear e da forma* 17).

Procuremos a *inversa duma transformação ortogonal* T_m: $x_j = \sum_k \alpha_{jk} \cdot \overline{x}_k$. É, neste caso,[2]

$\gamma_{jk} = \frac{A_{kj}}{\theta(D)} = \frac{\alpha_{kj} \cdot \theta(D)}{\theta(D)} = \alpha_{kj}$, logo a inversa é definida por

19) $$\overline{x}_j = \sum_k \alpha_{kj} \cdot x_k \qquad j = 1, 2, 3$$

e obtém-se, por conseqüência, trocando os índices dos coeficientes.

Calculemos o *produto duma transformação linear pela sua inversa.*

Fazendo o produto de $x_j = \sum_k c_{jk} \cdot \overline{x}_k$ por $\overline{x}_j = \sum_k \gamma_{jk} \cdot x_k$ obtém-se, por 15), $x_j = \sum_l r_{jl} \cdot \overline{\overline{x}}_l$ com [16)] $r_{jl} = \sum_k c_{jk} \cdot \gamma_{kl}$.

Mas [18)] $\gamma_{kl} = \frac{1}{\theta(D)} C_{lk}$, logo é $r_{jl} = \sum_k c_{jk} \cdot \frac{1}{\theta(D)} \cdot C_{lk} =$

$$= \frac{1}{\theta(D)} \sum_k c_{jk} \cdot C_{lk} = \frac{1}{\theta(D)} \cdot \delta_{jl} \cdot \theta(D)^{(3)} = \delta_{jl}.$$

---

(1) V. *Lições*, vol. 1.º, **4**, 4, 21) e 22).
(2) Idem, idem, **3**, 27, prop. 2.ª, 60).
(3) Idem, idem, **3**, 12, 23).

Tem-se, por conseqüência,

$$x_j = \sum_l \delta_{jl} \cdot \overset{=}{x}_l \qquad j = 1, 2, 3 \tag{20}$$

isto é, a transformação linear produto é a transformação

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \overset{=}{x}_1 \\ x_2 = \overset{=}{x}_2 \\ x_3 = \overset{=}{x}_3 \end{array} \right. \tag{20 a}$$

que se denomina *transformação identidade*, pelo facto de transformar um vector em si mesmo. Obtinha-se o mesmo resultado se se invertesse a ordem dos factores, logo:

Prop. 4.ª — Existe uma transformação linear, denominada transformação identidade (representá-la hemos por E*), que é igual ao produto de qualquer transformação linear pela sua inversa, independentemente da ordem dos factores.*

É fácil ver que a transformação identidade multiplicada por outra a não altera. Efectivamente, efectuando sôbre a transformação identidade outra transformação T_l obtém-se, à parte eventualmente a designação das letras, a mesma T_l e efectuando sôbre T_l a transformação identidade, obtém-se ainda T_l, logo

Prop. 5.ª — A multiplicação duma transformação linear T_l *pela transformação identidade é uma operação comutativa (como a da multiplicação pela inversa, o que é, na multiplicação de transformações lineares, uma excepção) e o resultado da operação é igual a* T_l.

4. — **O conceito de grupo de transformações lineares.** Seja considerado um conjunto U de elementos de natureza qualquer — números, qualquer que seja a sua natureza, operações, transformações, etc. — e suponhamos que dentro dêsse conjunto se definem, duma maneira inteiramente arbitrária:

a) uma operação de *composição* ou *multiplicação* de elementos de U, pela qual de dois elementos u_1 e u_2 de U se determina o seu *produto* $u_1 . u_2$;

b) um elemento de U que se designará por elemento *unidade* ou *identidade: e*.

c) o *inverso* u^{-1} dum elemento qualquer u de U.

O conjunto diz-se que é um *grupo* quando satisfaz às seguintes condições:

1.ª — O produto de dois elementos quaisquer de U é ainda um elemento de U — pela operação da composição ou produto não se sai nunca do conjunto.

2.ª — A operação da multiplicação é *uniforme* e *associativa*, não se exigindo, em geral, a sua comutatividade, isto é, podendo ser diferentes os produtos à esquerda e à direita de u_2 por u_1.

3.ª — O produto, à esquerda, da identidade por um elemento qualquer de U é igual a êsse mesmo elemento:

$$e \,.\, u = u \,.$$

4.ª — O produto, à esquerda, do inverso dum elemento pelo próprio elemento é igual à identidade

$$u^{-1} \,.\, u = e.$$

(Para a axiomática da noção de *grupo*, ver o volume desta colecção *Teoria das Matrizes*, por A. Monteiro).

Exemplos de grupos. 1.º — O conjunto dos números racionais, no qual se toma como *composição* a multiplicação ordinária de dois números racionais e como unidade o número *1*, satisfaz às condições postas e constitue, portanto, um grupo.

2.º — O conjunto dos números reais é também um grupo quando se toma para *composição* a multiplicação ordinária e para unidade o número *1*.

3.º — O conjunto dos números fraccionários (não inteiros), tomando como composição a multiplicação ordinária, *não é um grupo* visto que o produto de dois números fraccionários pode ser um número inteiro.

Não é, por razão análoga, um grupo o conjunto dos números reais não racionais.

4.º — O conjunto dos números inteiros positivos e negativos, incluindo zero, é um grupo desde que se tome como composição a adição ordinária e como unidade o número zero; o *inverso* de a é, então, $-a$.

5.° — O conjunto das translacções do espaço, onde se toma como composição a adição ordinária de translacções e como unidade a translacção nula, é também um grupo.

6.° — O conjunto das simetrias em relação a um ponto, tomando como *composição* ou *multiplicação* a efectivação sucessiva duma simetria em relação ao ponto M e uma simetria em relação ao ponto P, *não é grupo*, porque o *produto* dessas duas simetrias não é uma simetria, mas sim uma translacção definida pelo vector $2 . \overrightarrow{MP}$ (fig. 36).

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \\ = \overrightarrow{CC''} = 2 . \overrightarrow{MP}$$

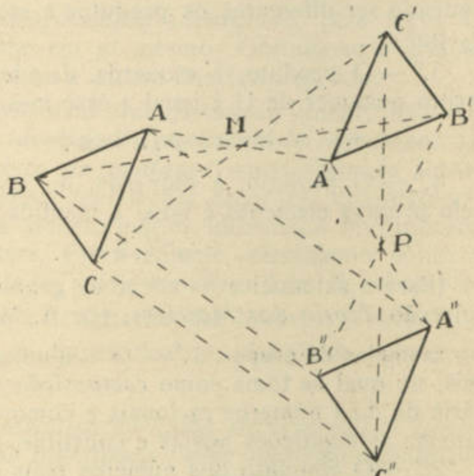


Fig. 36

Da definição dada de grupo resulta ainda que *o conjunto das transformações lineares* T_l *é um grupo,* como o *é também o conjunto das transformações ortogonais*. Êste último grupo diz-se um *sub-grupo* do grupo das transformações lineares pelo facto de as T_m formarem grupo e de tôda a T_m ser uma T_l.

É ainda verdade que *formam grupo as transformações ortogonais,* T_m, *de módulo* $+1$, mas já as transformações ortogonais de módulo -1 não formam grupo; efectivamente, o produto de duas dessas transformações não é uma transformação da mesma natureza, mas, sim, uma transformação ortogonal de módulo $+1$.

Importância do conceito de grupo. O conceito de grupo de transformações lineares tem uma importância enorme porque em relação a êle se podem classificar as propriedades geométricas do espaço. Há propriedades geométricas que são *invariantes* para um grupo de transformações lineares e que o não são para outras. Assim, por exemplo, o *paralelismo de rectas é uma propriedade invariante com o grupo das transformações lineares*, isto é, se dois dados vectores são paralelos, os seus transformados são também paralelos. Isto é uma conseqüência imediata de ser o operador D da transformação um operador linear; com efeito, dados dois vectores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2=\rho.\mathbf{V}_1$, paralelos, os seus transformados pela transformação linear são $\mathbf{W}_1=\mathrm{D}(\mathbf{V}_1)$ e $\mathbf{W}_2=\mathrm{D}(\rho.\mathbf{V}_1)=\rho.\mathrm{D}(\mathbf{V}_1)=\rho.\mathbf{W}_1$ isto é, $\mathbf{W}_2$ é paralelo a $\mathbf{W}_1$.

Mas já, por exemplo, a *ortogonalidade se não conserva para uma transformação linear qualquer.*

Suponhamos, com efeito, dois vectores $\mathbf{V}_1=\sum\limits_k x_k.\mathbf{i}_k$ e $\mathbf{V}_2=\sum\limits_k y_k.\mathbf{i}_k$ perpendiculares entre si, isto é, verificando-se entre êles a relação $\sum\limits_k x_k.y_k=0$, se sup~~o~~uzermos os eixos rectangulares.

Os seus transformados são $\mathrm{D}(\mathbf{V}_1)=\sum\limits_k \bar{x}_k.\mathbf{i}_k$, $\mathrm{D}(\mathbf{V}_2)=$ $=\sum\limits_k \bar{y}_k.\mathbf{i}_k$ com $\bar{x}_k=\sum\limits_j c_{jk}.x_j$, $\bar{y}_k=\sum\limits_j c_{jk}.y_j$; calculemos $\sum\limits_k \bar{x}_k.\bar{y}_k$. É $\sum\limits_k \bar{x}_k.\bar{y}_k=\sum\limits_k(\sum\limits_j c_{jk}.x_j).(\sum\limits_l c_{lk}.y_l)=\sum\limits_{jl} x_j y_l.\sum\limits_k c_{jk}.c_{lk}=$ $=\sum\limits_{jl} d_{jl} x_j.y_l$, não nulo em geral.

É fácil ver, porém, que se a transformação fôr ortogonal a ortogonalidade se conserva; efectivamente, neste caso é $c_{jk}=\alpha_{jk}$ e tem-se [3, 14)] $d_{jl}=\sum\limits_k \alpha_{jk}.\alpha_{lk}=\delta_{jl}$ donde

$\sum_k \bar{x}_k . \bar{y}_k = \sum_{jl} \delta_{jl} . x_j . y_l = \sum_j x_j \sum_l \delta_{jl} y_l = \sum_j x_j . y_j = 0,$ logo o anulamento de $\sum_k \bar{x}_k . \bar{y}_k$ é uma conseqüência do anulamento de $\sum_k x_k . y_k$ e os vectores transformados são ortogonais como o eram os primeiros.

Há muitas outras propriedades que são destruídas por uma transformação linear geral T_l e conservadas por uma transformação linear ortogonal; está neste número, como fàcilmente se verifica, o ângulo de dois vectores e o *módulo* dum vector e, por conseqüência, a distância de dois pontos do espaço. Resulta daqui que as áreas e os volumes são alterados por uma transformação T_l e conservados (em valor absoluto, pelo menos) por uma T_m. Verifiquêmo-lo, por exemplo, para o volume dum paralelipípedo.

Supondo sempre o sistema fundamental rectangular, sejam três vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= a_{11} . \mathbf{i}_1 + a_{12} . \mathbf{i}_2 + a_{13} . \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{V}_2 &= a_{21} . \mathbf{i}_1 + a_{22} . \mathbf{i}_2 + a_{23} . \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{V}_3 &= a_{31} . \mathbf{i}_1 + a_{32} . \mathbf{i}_2 + a_{33} . \mathbf{i}_3 . \end{aligned}$$

O paralelipípedo definido por estes três vectores como arestas saídas dum ponto tem, como se sabe, [**1**, 15] o volume

$$\mathrm{V} = \mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Façamos uma transformação linear T_l de operador $D = ((c_{jk}))$ e relacionemos êste volume com o do paralelipípedo definido pelos vectores transformados

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{V}}_1 &= \bar{a}_{11} . \mathbf{i}_1 + \bar{a}_{12} . \mathbf{i}_2 + \bar{a}_{13} . \mathbf{i}_3 \\ \overline{\mathbf{V}}_2 &= \bar{a}_{21} . \mathbf{i}_1 + \bar{a}_{22} . \mathbf{i}_2 + \bar{a}_{23} . \mathbf{i}_3 \\ \overline{\mathbf{V}}_3 &= \bar{a}_{31} . \mathbf{i}_1 + \bar{a}_{32} . \mathbf{i}_2 + \bar{a}_{33} . \mathbf{i}_3 . \end{aligned}$$

$$\text{E} \qquad V' = \overline{V}_1 | \overline{V}_2 \wedge \overline{V}_3 = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix}.$$

Ora, como os a_{ij} se relacionam com $\bar{a}_{ij}$ por [1, 8)] $a_{ij} = \sum\limits_k c_{jk} \cdot \bar{a}_{ik}$ tem-se, em virtude da lei de formação do produto de determinantes, que $V = V' \cdot \theta(D)$, isto é, os dois volumes não são iguais, mas sim estão numa relação constante igual ao *módulo* da transformação e daqui resulta que se a transformação fôr ortogonal e de módulo $+1$ os volumes conservam-se, se fôr ortogonal e de módulo -1 os volumes conservam o valor absoluto e mudam de sinal.

Em resumo. A existência e utilização dum determinado grupo de transformações pode servir para ordenação e selecção das propriedades geométricas, tomando como critério de selecção precisamente o facto de as propriedades se conservarem ou não invariantes em relação ao grupo. A cada grupo corresponde assim um determinado conjunto de propriedades que se conservam invariantes, propriedades cujo estudo constitue o objecto duma determinada geometria.

Assim, as propriedades *métricas* do espaço são invariantes com o grupo das transformações ortogonais (de módulo $+1$ se se quere conservar o sinal) as quais, por isso, se representaram por T_m; a geometria que lhe corresponde será a *geometria métrica*. Das propriedades invariantes com êsse grupo há algumas que desaparecem com o grupo mais geral das transformações lineares (distâncias, ângulos, etc.) e outras que se conservam (paralelismo, por exemplo); será o conjunto destas que fará objecto da geometria do grupo linear homogéneo (grupo das transformações lineares T_l) ou geometria afim, etc.

Sem pretender aqui entrar-se em mais largos desenvolvimentos, vê-se já, no entanto, que papel central o conceito de grupo desempenha, não só na estrutura de cada geometria particular, como na ordenação lógica de umas em relação a outras.

5. — **Invariâncias em relação ao grupo das transformações ortogonais.** Em tudo o que vai seguir-se, têm uma importância muito particular as transformações ortogonais. Convém, por isso, dar um resumo de alguns escalares importantes que são invariantes em relação ao grupo dessas transformações.

São invariantes com o grupo das transformações ortogonais:

1.º — *O produto escalar de dois vectores.*

Sejam, com efeito, os vectores $\mathbf{V}_1 = \sum\limits_k x_k \,.\, \mathbf{i}_k$ e $\mathbf{V}_2 = \sum\limits_k y_k \,.\, \mathbf{i}_k$ e a transformação ortogonal

$$\mathrm{T}_m) \qquad x_k = \sum_j \alpha_{kj} \,.\, \bar{x}_j \,.$$

Tem-se
$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_2 &= \sum_k x_k \,.\, y_k = \sum_k \Big(\sum_j \alpha_{kj} \,.\, \bar{x}_j\Big) \,.\, \Big(\sum_l \alpha_{kl} \,.\, \bar{y}_l\Big) \\ &= \sum_{jl} \bar{x}_j \,.\, \bar{y}_l \,.\, \sum_k \alpha_{kj} \,.\, \alpha_{kl} = \sum_{jl} \bar{x}_j \,.\, \bar{y}_l \,.\, \delta_{jl} \quad [3,13)] \\ &= \sum_j \bar{x}_j \Big(\sum_l \delta_{jl} \,.\, \bar{y}_l\Big) = \sum_j \bar{x}_j \,.\, \bar{y}_j \qquad .\end{aligned}$$

com o que fica demonstrada a invariância, visto que o produto escalar dos vectores transformados, $\overline{\mathbf{V}}_1 | \overline{\mathbf{V}}_2 = \sum\limits_j \bar{x}_j \,.\, \bar{y}_j$, é igual ao dos vectores primitivos, $\mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_2 = \sum\limits_j x_j \,.\, y_j$. A invariância pode ser entendida doutra maneira: como a do produto escalar dos mesmos dois vectores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ em relação aos dois sistemas de eixos, visto que, sendo os eixos rectangulares, o produto escalar tem a mesma expressão formal em ambos os sistemas.

2.º — *O módulo dum vector.*

Com efeito, como $(mod\,\mathbf{V})^2 = \mathbf{V} | \mathbf{V}$, pela propriedade anterior tem-se $(mod\,\overline{\mathbf{V}})^2 = \overline{\mathbf{V}} | \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{V} | \mathbf{V} = (mod\,\mathbf{V})^2$.

Daqui resulta, é claro, que a distância de dois pontos quaisquer do espaço é invariante com o grupo das transformações ortogonais. Faz-se uma observação análoga à da propriedade anterior quanto à maneira de entender a invariância.

3.º — *O ângulo de dois vectores.*

Efectivamente dados os vectores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ com ângulo θ e os seus transformados $\overline{\mathbf{V}}_1$ e $\overline{\mathbf{V}}_2$ com ângulo θ', tem-se [1, 14, 100)] pelas duas propriedades anteriores,

$$cos\,\theta' = \frac{\overline{\mathbf{V}}_1 | \overline{\mathbf{V}}_2}{mod\,\overline{\mathbf{V}}_1 \, . \, mod\,\overline{\mathbf{V}}_2} = \frac{\mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_2}{mod\,\mathbf{V}_1 \, . \, mod\,\mathbf{V}_2} = cos\,\theta \, .$$

Mesma observação quanto ao modo de entender a invariância.

4.º — *O valor absoluto da área do paralelogramo determinado por dois vectores e também o sinal quando o módulo da transformação fôr + 1.*

Que o valor absoluto da área se mantém, isso resulta imediatamente da conservação dos módulos dos vectores e do seu ângulo.

Quanto ao sinal, êsse depende da orientação do produto vectorial dos dois vectores; sejam, no primeiro sistema rectangular, $\mathbf{V}_1 = \sum\limits_k x_k \, . \, \mathbf{i}_k$, $\mathbf{V}_2 = \sum\limits_k y_k \, . \, \mathbf{i}_k$ e no segundo sistema os mesmos vectores $\mathbf{V}_1 = \sum\limits_k \overline{x}_k \, . \, \overline{\mathbf{i}}_k$, $\mathbf{V}_2 = \sum\limits_k \overline{y}_k \, . \, \overline{\mathbf{i}}_k$.

O seu produto vectorial no segundo sistema é [1, 11, 80)]

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} \overline{\mathbf{i}}_1 & \overline{\mathbf{i}}_2 & \overline{\mathbf{i}}_3 \\ \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \\ \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \overline{y}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_j \alpha_{j1} \, . \, \mathbf{i}_j & \sum\limits_j \alpha_{j2} \, . \, \mathbf{i}_j & \sum\limits_j \alpha_{j3} \, . \, \mathbf{i}_j \\ \sum\limits_j \alpha_{j1} \, . \, x_j & \sum\limits_j \alpha_{j2} \, . \, x_j & \sum\limits_j \alpha_{j3} \, . \, x_j \\ \sum\limits_j \alpha_{j1} \, . \, y_j & \sum\limits_j \alpha_{j2} \, . \, y_j & \sum\limits_j \alpha_{j3} \, . \, y_j \end{vmatrix}$$

em virtude de 1, 5) e 3, 19).

Ora o último determinante é, como imediatamente se verifica efectuando o produto de colunas por linhas, igual ao produto

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \, . \, \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$= \pm \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$ referido ao primeiro sistema, devendo tomar-se o sinal + se a transformação fôr de módulo + *1* e o sinal — se ela fôr de módulo — *1*. O sinal da área é mantido, portanto, no 1.º caso e alterado no segundo.

Êste resultado permite-nos interpretar geomètricamente o sinal do módulo da transformação ortogonal. Como acabamos de ver, o produto vectorial de dois vectores quaisquer tem um sentido ou o oposto conforme o módulo é $+1$ ou -1; sejam $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$ os dois vectores — a área do paralelogramo por êles definido, na ordem $\mathbf{i}_1$ para $\mathbf{i}_2$, é positiva e o seu produto vectorial é $\mathbf{i}_3$; façamos uma transformação ortogonal de módulo $+1$; a área continua positiva, $\overline{\mathbf{i}}_3$ fica disposto em relação a $\overline{\mathbf{i}}_1$ e $\overline{\mathbf{i}}_2$ como $\mathbf{i}_3$ o está em relação a $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$, isto é, o novo triedro triortogonal tem a disposição do primeiro.

Se a transformação é de módulo -1, o novo produto vectorial é oposto a $\overline{\mathbf{i}}_3$ e o novo triedro tem, portanto, disposição diferente.

5.º — *O volume, em valor absoluto, do paralelipípedo definido por três vectores como arestas, havendo conservação ou não de sinal conforme o módulo fôr* $+1$ ou -1.

Se se entende que o sistema de referência se mantém e que os vectores se transformam, a demonstração foi feita já no final do parágrafo anterior.

Entendendo que os vectores se conservam e se muda de sistema (triortogonal) de referência tem-se que os vectores $\mathbf{V}_1 = \sum\limits_k x_k \,.\, \mathbf{i}_k$, $\mathbf{V}_2 = \sum\limits_k y_k \,.\, \mathbf{i}_k$, $\mathbf{V}_3 = \sum\limits_k z_k \,.\, \mathbf{i}_k$ têm no novo sistema as decomposições $\mathbf{V}_1 = \sum\limits_k \overline{x}_k \,.\, \overline{\mathbf{i}}_k$, $\mathbf{V}_2 = \sum\limits_k \overline{y}_k \,.\, \overline{\mathbf{i}}_k$, $\mathbf{V}_3 = \sum\limits_k \overline{z}_k \,.\, \overline{\mathbf{i}}_k$ e, como o novo sistema é rectangular, a expressão do volume é dada ainda pelo produto mixto dos três vectores e tem-se, do mesmo modo,

$$\mathrm{V} = \begin{vmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \\ \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \overline{y}_3 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

como imediatamente se verifica fazendo substituições de valores e efectuando o produto dos determinantes.

6. — **O ponto de vista do Cálculo Tensorial.** Nos parágrafos anteriores foram deduzidas as fórmulas gerais de transformação de coordenadas cartesianas (não rectangulares, em geral)

$$21)\qquad x_j = \sum_k c_{jk} \cdot \bar{x}_k \qquad j = 1, 2, 3, \qquad [1, 8)]$$

e as da transformação inversa

$$22)\qquad \bar{x}_j = \sum_k \gamma_{jk} \cdot x_k \qquad j = 1, 2, 3, \qquad [3, 17)]$$

com

$$23)\qquad \gamma_{jk} = \frac{1}{\theta(D)} C_{kj}. \qquad [3, 18)]$$

Encaradas do ponto de vista geométrico (o ponto de vista da geometria afim) estas fórmulas levaram às perspectivas da intervenção do conceito de grupo na sistematização das geometrias [4].

Vamos agora encarar as mesmas fórmulas de transformação dum ponto de vista diferente — o ponto de vista analítico formal, tomando como centro de interesse o *modo como se transformam as coordenadas* dum vector, quando se muda de sistema de referência cartesiano.

A questão apresenta-se, vista sob êste ângulo, do modo seguinte — num determinado sistema cartesiano de referência (S) três números reais quaisquer x_1, x_2, x_3 definem um e um só *vector* **V**; mudemos para o sistema de referência também cartesiano $(\bar{S})$; nesse novo sistema há três números reais únicos $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, ligados com x_1, x_2, x_3 pela transformação linear 21) e 22), que determinam o *mesmo* vector **V.** Conseqüentemente, êste vector **V** é universalmente acompanhado e definido pelos três primitivos números reais x_1, x_2, x_3 e fórmulas de transformação da forma 21). Em vista disso, podemos estabelecer a seguinte nova concepção *analítica* de vector — entidade analítica definida unìvocamente por um dado conjunto de três números reais ou, mais geralmente, de três funções de x_1, x_2, x_3 que se transformam, de sistema cartesiano para sistema cartesiano, por dadas relações, com base na transformação linear 21).

É êste, sôbre a concepção da entidade vector, o ponto de vista do *cálculo tensorial*, ponto de vista que nos parágrafos seguintes vai ser desenvolvido.

Antes de prosseguir, notemos, desde já, que a transformação de sistema para sistema, com base na transformação linear 21), pode ser de duas naturezas diferentes.

Sejam u^1, u^2, u^3 (1, 2, 3 são *índices* superiores e não expoentes; já será vista a razão por que se colocam em cima e não em baixo como habitualmente) três funções de x_1, x_2, x_3 no sistema (S); se, quando as variáveis x_1, x_2, x_3 são substituídas por $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ com elas ligadas por 21), [se se efectua uma transformação linear 21)] essas funções se transformam em $\overline{u}^1$, $\overline{u}^2$, $\overline{u}^3$ *como as próprias variáveis*, isto é, pelas relações

$$24) \qquad u^j = \sum_k c_{jk} . \overline{u}^k \qquad j = 1, 2, 3$$

as u^j dizem-se as *componentes contravariantes* dum vector.

Sejam agora u_1, u_2, u_3 três funções de x_1, x_2, x_3 e a transformação linear 21); se quando se efectua essa transformação linear (mudança de sistema cartesiano) essas funções se transformam em $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$, pelas relações

$$25) \qquad u_j = \sum_k \gamma_{kj} . \overline{u}_k \qquad j = 1, 2, 3$$

onde, como habitualmente,

$$26) \qquad \gamma_{kj} = \frac{1}{\theta(\mathrm{D})} \mathrm{C}_{jk}$$

as u_j dizem-se as *colnponentes covariantes* dum vector.

As duas transformações — de contravariância e de covariância — são diferentes.

A primeira é, como acima se disse, a transformação das próprias variáveis na transformação linear. A segunda é, como vamos ver, *a forma de transformação dos coeficientes duma* *forma linear invariante com uma dada transformação linear* (quando as variáves se transformam por contravariância).

Seja, com efeito, a forma linear nas variáveis x^1, x^2, x^3: $\sum_k a_k . x^k$ e suponhamos que, feita a transformação linear 21), a forma se mantém invariante, isto é, que

$$\sum_k a_k . x^k = \sum_k \overline{a}_k . \overline{x}^k .$$

Tem-se de 22) $\overline{x}^k = \sum_j \gamma_{kj} . x^j$ logo $\sum_k a_k . x^k =$ $= \sum_k \overline{a}_k . (\sum_j \gamma_{kj} . x^j) = \sum_j (\sum_k \overline{a}_k . \gamma_{kj}) . x^j$ ou, o que é o mesmo, $\sum_j a_j x^j = \sum_j (\sum_k \gamma_{kj} \overline{a}_k) . x^j$ donde $a_j = \sum_k \gamma_{kj} . \overline{a}_k$ que é, evidentemente, da forma 25).

Conclue-se portanto que *quando numa forma linear as variáveis se transformam por contravariância, se a forma se mantém invariante com essa transformação, os coeficientes transformam-se por covariância.*

Para distinguir umas das outras, representam-se as variáveis contravariantes com índices superiores e as covariantes com índices inferiores.

Vejamos o que se passa quando a transformação é ortogonal:

27) $$x_j = \sum_k \alpha_{jk} . \overline{x}_k \qquad j = 1, 2, 3. \quad [1, 6)]$$

As componentes contravariantes u^1, u^2, u^3 dum vector, transformam-se por [24)] $u^j = \sum_k \alpha_{jk} . \overline{u}^k$ e as componentes covariantes u_1, u_2, u_3 por [25)] $u_j = \sum_k \gamma'_{kj} . \overline{u}_k$ com [26)]

$$\gamma'_{kj} = \frac{1}{\theta(\mathrm{D})} \cdot \mathrm{A}_{jk} = \frac{1}{\theta(\mathrm{D})} \cdot \alpha_{jk} . \theta(\mathrm{D})^{(1)} = \alpha_{jk},$$ logo é

(1) V. *Lições*, vol. 1.º, **3**, *27*, prop. 2.ª, 60).

$u_j = \sum_k \alpha_{jk} . \bar{u}_k$ isto é, *a diferença entre transformação contravariante e covariante e, por conseqüência, entre componentes contravariantes e covariantes dum vector, desaparece se a transformação é ortogonal ou, por outras palavras, se os dois sistemas são rectangulares.*

Encontramos, assim, pela segunda vez, as transformações ortogonais a produzir uma notável simplificação no âmbito em que actuam.

No que vai seguir-se, supôr-se há *sempre* que se trata de transformações ortogonais e não se fará, portanto, mais descriminação entre contravariância e covariância de componentes dum vector.

7. — Produto tensorial. Tensor.

I. — **Produto tensorial.** Sejam considerados dois vectores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ e sejam, num sistema cartesiano triortogonal, x_k e y_k, $k = 1, 2, 3$, respectivamente, as suas coordenadas, isto é, seja

$$\mathbf{V}_1 = \sum_k x_k . \mathbf{i}_k \qquad \mathbf{V}_2 = \sum_k y_k . \mathbf{i}_k .$$

Façamos os $3^2 = 9$ produtos $x_j . y_k$ de cada uma das coordenadas de $\mathbf{V}_1$ por cada uma de $\mathbf{V}_2$; obtemos aquilo a que se chama um *sistema* de 9 *elementos*, os quais se dizem, habitualmente, as *componentes* dêsse sistema. O sistema pode representar-se, abreviadamente, por

$$t_{jk} = x_j . y_k \qquad j, k = 1, 2, 3 \tag{28}$$

onde se entende que aos índices j e k — *índices livres* — se devem dar, *independentemente um do outro*, os valores $1, 2, 3$.

Em geral, chamaremos *sistema* ao conjunto de todos os elementos — *componentes do sistema* — que resultam da expressão simbólica

$$x_{i_1, i_2, \ldots i_n} \tag{29}$$

onde os índices $i_1, i_2, \ldots i_n$ tomam, independentemente uns dos outros, os valores inteiros dum certo conjunto. Se êles são susceptíveis de tomar os valores inteiros $1, 2, 3$, o sistema 29) tem 3^n componentes. Como se vê, cada um dêsses índices, tomando livremente os valores do seu conjunto, no caso presente os valores *1, 2, 3*, concorre para a formação de componentes novas e diz-se, por isso, um *índice livre*.

Na expressão simbólica dum sistema, podem aparecer também índices ligados ao desenvolvimento dum somatório (índices repetidos como índice dum somatório); êsses índices não produzem componentes novas — dizem-se *índices mudos*.

Por exemplo, o sistema

30) $$\sum_i a_{ik} \qquad i, k = 1, 2, 3$$

tem dois índices, mas apenas um livre, k; o outro, i, é índice mudo; êste sistema tem três componentes, visto que

$$\sum_i a_{ik} = a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} \qquad i, k = 1, 2, 3$$

e essas três componentes são

$$k = 1 \rightarrow a_{11} + a_{21} + a_{31} = b_1$$
$$k = 2 \rightarrow a_{12} + a_{22} + a_{32} = b_2$$
$$k = 3 \rightarrow a_{13} + a_{23} + a_{33} = b_3.$$

Pode portanto escrever-se

30 *a*) $$b_k = \sum_i a_{ik} \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Habitualmente, usa-se a expressão simbólica 29) tanto para designar individualmente as componentes para valores particulares dos índices, como para representar colectivamente o sistema.

Chama-se *ordem* dum sistema ao número dos seus índices livres — o sistema 28) é de ordem *2* ou *duplo*, o sistema 29) de ordem n, o sistema 30) de ordem *1* ou *simples*; um sistema de *ordem zero* é um sistema com uma só componente; é, por conseqüência, um sistema em que todos os índices são mudos.

É claro que é indiferente a letra que designa um índice mudo; assim, é, por exemplo,

30 *b*) $$b_k = \sum_i a_{ik} = \sum_l a_{lk} = \sum_r a_{rk} \qquad k = 1, 2, 3.$$

Voltemos ao sistema *duplo* 28) $t_{jk} = x_j . y_k$ para pôr a seguinte questão — ¿como se transformam as componentes dêste sistema quando se efectua uma transformação ortogonal

31) $$x_j = \sum_k \alpha_{jk} . \overline{x}_k \qquad j = 1, 2, 3 \quad [1, 6)]$$

isto é, uma mudança para um novo sistema rectangular de coordenadas cartesianas?

Chamemos $\overline{t}_{jk}$ à componente transformada de t_{jk}, que se define pela igualdade

32) $$\overline{t}_{jk} = \overline{x}_j . \overline{y}_k .$$

Tem-se, fazendo a transformação,

$$x_j = \sum_r \alpha_{jr} . \overline{x}_r \qquad y_k = \sum_s \alpha_{ks} . \overline{y}_s \qquad \text{donde}$$

$t_{jk} = x_j . y_k = \sum_r \alpha_{jr} . \overline{x}_r . \sum_s \alpha_{ks} . \overline{y}_s = \sum_{rs} \alpha_{jr} . \alpha_{ks} . \overline{x}_r . \overline{y}_s$; é, portanto, em virtude de 32),

33) $$t_{jk} = \sum_{rs} \alpha_{jr} . \alpha_{ks} . \overline{t}_{rs} \quad .$$

com o que se responde à pregunta feita.

Vejamos agora como se efectua a transformação *inversa*, isto é, como se transformam as componentes do sistema duplo considerado quando se efectua uma transformação ortogonal de coordenadas inversa de 31)

34) $$\overline{x}_j = \sum_k \alpha_{kj} . x_k \qquad j = 1, 2, 3 \quad [3, 19)].$$

Tem-se então, por ser $\overline{x}_j = \sum_r \alpha_{rj} . x_r \quad \overline{y}_k = \sum_s \alpha_{sk} . y_s$,

$\overline{t}_{jk} = \overline{x}_j . \overline{y}_k = \sum_r \alpha_{rj} . x_r . \sum_s \alpha_{sk} . y_s = \sum_{rs} \alpha_{rj} . \alpha_{sk} . x_r . y_s$ ou seja

35) $$\overline{t}_{jk} = \sum_{rs} \alpha_{rj} . \alpha_{sk} . t_{rs} .$$

Definição. Ao sistema duplo 28) $t_{jk} = x_j . y_k$, definido a partir das coordenadas dos dois vectores $\mathbf{V}_1 = \sum_k x_k . \mathbf{i}_k$,

$\mathbf{V}_2 = \sum_k y_k \cdot \mathbf{i}_k$, e que, pela efectivação duma transformação ortogonal de coordenadas, se transforma, como acaba de ver-se, pela fórmula 33) e sua inversa 35) dá-se o nome de *produto tensorial* dos dois vectores dados $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$.

A noção de produto tensorial pode ser fàcilmenie generalizada.

Sejam dados, num sistema (S) de coordenadas cartesianas rectangulares, os n vectores

$$\mathbf{V}_1 = \sum_k x_k^{(1)} \cdot \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{V}_2 = \sum_k x_k^{(2)} \cdot \mathbf{i}_k, \cdots \mathbf{V}_n = \sum_k x_k^{(n)} \cdot \mathbf{i}_k$$

e construa-se o sistema de ordem n (3^n componentes)

36) $t_{j_1, j_2, \cdots j_n} = x_{j_1}^{(1)} \cdot x_{j_2}^{(2)} \cdot \cdots x_{j_n}^{(n)} \quad j_1, j_2, \cdots j_n = 1, 2, 3.$

Façamos uma transformação ortogonal de coordenadas, 31), e chamemos, no novo sistema cartesiano rectangular, componente transformada ao número definido pela igualdade

37) $\bar{t}_{j_1, j_2, \cdots j_n} = \bar{x}_{j_1}^{(1)} \cdot \bar{x}_{j_2}^{(2)} \cdot \cdots \bar{x}_{j_n}^{(n)}$

¿Como se relacionam as componentes t com $\bar{t}$?

De ser

$$x_{j_1}^{(1)} = \sum_{r_1} \alpha_{j_1 r_1} \cdot \bar{x}_{r_1}^{(1)}$$

$$\cdots$$

$$x_{j_n}^{(n)} = \sum_{r_n} \alpha_{j_n r_n} \cdot \bar{x}_{r_n}^{(n)}$$

resulta que [36)]

$$\begin{aligned} t_{j_1, j_2, \cdots j_n} &= \left(\sum_{r_1} \alpha_{j_1 r_1} \cdot \bar{x}_{r_1}^{(1)} \right) \cdots \left(\sum_{r_n} \alpha_{j_n r_n} \cdot \bar{x}_{r_n}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{r_1, \ldots r_n} \alpha_{j_1 r_1} \cdot \cdots \alpha_{j_n r_n} \cdot \bar{x}_{r_1}^{(1)} \cdots \bar{x}_{r_n}^{(n)} \end{aligned}$$

ou, em virtude de 37),

38) $t_{j_1, \ldots j_n} = \sum_{r_1, \ldots r_n} \alpha_{j_1 r_1} \cdot \cdots \alpha_{j_n r_n} \cdot \bar{t}_{r_1, \ldots r_n}.$

Duma maneira inteiramente análoga à anterior se deduz que, para a transformação inversa se tem

39) $\overline{t}_{j_1, \cdots j_n} = \sum_{r_1, \ldots r_n} \alpha_{r_1 j_1} \cdots \alpha_{r_n j_n} \cdot t_{r_1, \cdots r_n}$.

Ao sistema 36) que, por uma transformação ortogonal de coordenadas, se transforma, como acabamos de ver, em obediência às leis 38) e 39) dá-se o nome de *produto tensorial* dos n vectores $\mathbf{V}_1, \cdots \mathbf{V}_n$.

Como casos particulares da multiplicação tensorial que acaba de ser definida têm-se, como é óbvio, o *quadrado tensorial,* em geral, a *potência tensorial de expoente n* dum vector.

II. — **Tensor.** Os desenvolvimentos anteriores permitem--nos agora dar a definição de tensor em coordenadas cartesianas rectangulares:

Dado o sistema de ordem n $t_{i, j, \ldots l}$, $i, j, \cdots l = 1, 2, 3.$ *diz-se que êle constitue um* **tensor** *em relação à transformação ortogonal* [1, 6)] *de coordenadas cartesianas, quando por essa transformação as suas* 3^n *componentes* $t_{i, j, \ldots l}$ *se transformam noutras componentes* $\overline{t}_{i, j, \ldots l}$ *pela lei*

40) $t_{i, j, \ldots l} = \sum_{r, s, \ldots u} \alpha_{ir} \cdot \alpha_{js} \cdots \alpha_{lu} \cdot \overline{t}_{r, s, \ldots u}$

e sua inversa

41) $\overline{t}_{i, j, \ldots l} = \sum_{r, s, \ldots u} \alpha_{ri} \cdot \alpha_{sj} \cdots \alpha_{ul} \cdot t_{r, s, \ldots u}$.

Por uma convenção, estabelecida por Einstein e habitualmente seguida por virtude da comodidade que proporciona na escrita das fórmulas, convenciona-se suprimir o sinal de somatório sempre que êle se efectue segundo um índice que apareça *repetido* na indicação simbólica dum sistema; para isto é preciso entender-se sempre que *a repetição de um índice é sinal de que deve ser feito um somatório em relação a êsse índice.* Assim, não pode, por exemplo, dispensar-se o sinal de somatório no sistema $b_k = \sum_i a_{ik}$ [30 a)] visto que o índice i não aparecia repetido na indicação a_{ik}, mas a escrita

$a_{ik} \cdot b_i$ indica que deve ser feito um somatório em relação a i, isto é, que se trata, na realidade, do sistema $c_k = \sum_i a_{ik} \cdot b_i$.

De acôrdo com esta convenção de supressão dos somatórios, as fórmulas 40) e 41) escrevem-se, respectivamente,

$$40\,a) \qquad t_{i,j,\ldots l} = \alpha_{ir} \cdot \alpha_{js} \cdot \ldots \alpha_{lu} \cdot \overline{t}_{r,s,\ldots u}$$

$$41\,a) \qquad \overline{t}_{i,j,\ldots l} = \alpha_{ri} \cdot \alpha_{sj} \cdot \ldots \alpha_{ul} \cdot t_{r,s,\ldots u}.$$

Da definição de tensor resultam imediatamente as seguintes conseqüências importantes.

1.ª — Todo o vector é um *tensor de ordem 1* ou *tensor simples*. Efectivamente, as leis de transformação 40) e 41) que definem o tensor têm manifestamente como casos particulares as leis de transformação das coordenadas dos vectores que agora se escrevem, com a nova convenção

$$x_j = \alpha_{jk} \cdot \overline{x}_k \qquad \overline{x}_j = \alpha_{kj} \cdot x_k.$$

2.ª—Todo o escalar que, por uma transformação ortogonal de coordenadas, não altera o seu valor, isto é, que é *invariante* com os sistemas cartesianos rectangulares, pode ser considerado como um tensor de ordem zero — a igualdade de invariância $m = \overline{m}$ pode ser efectivamente considerada como um caso particular das leis gerais 40) e 41).

Temos, assim, definida uma classe geral de entidades — os tensores — que engloba como entidades particulares os escalares e os vectores. Encaradas dêste ponto de vista geral, as distinções aparecem como resultantes, apenas, das diferenças de ordem. A corroborar a justeza dêste ponto de vista, serão adiante definidas operações que permitem percorrer, em sentido ascendente ou descendente, a escala de ordens dos tensores, desde, ou até, à ordem zero.

3.ª — Os produtos tensoriais atrás definidos, são, afinal, tensores; é o que mostra o aspecto das suas fórmulas de transformação — casos particulares de 40) e 41).

4.ª — Um tensor pode ser definido por um *sistema arbi-*

trário de 3^n números (ou funções) num determinado sistema (S) de coordenadas cartesianas rectangulares; as suas componentes noutro sistema qualquer $(\overline{S})$, também cartesiano rectangular, vêm dadas em função das primeiras pelas relações 40) e 41).

5.ª — As relações 40) e 41) mostram que as componentes dum tensor num sistema cartesiano rectangular são *combinações lineares e homogéneas* das componentes do mesmo tensor noutro sistema qualquer, também cartesiano rectangular. Em particular, *se essas componentes forem nulas num sistema, são também nulas em qualquer outro e se dois tensores têm componentes, respectivamente, iguais num sistema, têm-nas também, respectivamente, iguais em qualquer outro.*

Daqui resulta:

a) Que se pode definir *tensor nulo* como aquele que tem, num sistema cartesiano rectangular, e portanto em qualquer outro, componentes tôdas nulas; mas há aqui a notar que *há um tensor nulo em cada ordem,* sendo, por exemplo, diferentes o vector nulo do tensor nulo de 2.ª ordem, etc.

b) Que *as equações tensoriais têm carácter absoluto* — tôda a equação tensorial obtida igualando um tensor a zero (equivalente ao conjunto das 3^n equações cartesianas obtidas igualando a zero cada uma das componentes) num determinado sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, continua a verificar-se em qualquer outro sistema de coordenadas cartesianas rectangulares: a equação é independente do sistema de referência. Aqui reside uma das razões principais da comodidade que o cálculo tensorial proporciona no estudo de certas leis físicas.

c) Que se pode definir *igualdade* de tensores do modo seguinte — *dois tensores da mesma ordem dizem-se iguais quando as suas componentes correspondentes* (com os mesmos valores particulares dos índices) *são iguais num sistema cartesiano rectangular* (e portanto em qualquer outro). E é claro que a igualdade $T_1 = T_2$ onde T_1 é o tensor de componentes $t^{(1)}_{j_1,\dots j_n}$ e T_2 o tensor de componentes $t^{(2)}_{j_1,\dots j_n}$ equivale às 3^n igualdades

42) $$t^{(1)}_{j_1,\dots j_n} = t^{(2)}_{j_1,\dots j_n} \qquad j_1,\cdots j_n = 1, 2, 3$$

independentes do sistema de referência.

6.ª — Se a transformação de coordenadas não fôr ortogonal, podem efectuar-se produtos tensoriais, e definir-se tensores, mais gerais que os definidos acima; efectivamente, como há, então, contravariância e covariância nas componentes dos vectores [6], podem formar-se produtos onde figure só a contravariância (por exemplo, o produto tensorial de dois vectores dados pelas suas componentes contravariantes), só a covariância (por exemplo, o produto tensorial de dois vectores dados pelas suas componentes covariantes) ou, simultâneamente, contravariância e covariância (por exemplo, o produto tensorial dum vector dado pelas componentes contravariantes por um vector dado pelas covariantes). É possível, por conseqüência, definir componentes contravariantes, covariantes e mixtas dum tensor, isto é, definir tensores cujas componentes são contravariantes nuns índices e covariantes noutros.

Dêste caso não nos ocuparemos aqui, por tratarmos, *apenas*, de coordenadas cartesianas rectangulares.

8. — Sistemas e Tensores particulares.

I. — **Simetria e hemisimetria.** Consideremos um sistema de ordem qualquer.

Se, pela troca de dois índices livres, i e k, as componentes se não alteram, o sistema diz-se *simétrico* nos dois índices i e k.

Se a simetria se dá em relação a qualquer par de índices, o sistema diz-se *completamente simétrico.* O valor algébrico das componentes dum sistema completamente simétrico não se altera, pela definição, quando se efectua uma permutação qualquer sôbre os índices; o número das suas componentes distintas é, conseqüentemente, $\Gamma_{3,n} = C_{n+2,2}$.

Por exemplo, *o sistema duplo simétrico* a_{ik} tem $\Gamma_{3,2} = C_{4,2} = 6$ componentes distintas: a_{11}, a_{22}, a_{33}, $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$.

O sistema triplo, completamente simétrico a_{ijk} tem

$\Gamma_{3,3} = C_{5,2} = 10$ componentes distintas: $a_{111}, a_{222}, a_{333}, a_{112}, a_{113}, a_{221}, a_{223}, a_{331}, a_{332}, a_{123}$.

Se, pela troca de dois índices livres, i e k, as componentes conservam o valor absoluto, mas mudam de sinal, o sistema diz-se *hemisimétrico* nesses dois índices i e k. Como acima, o sistema diz-se *completamente hemisimétrico* quando é hemisimétrico em relação a qualquer par de índices.

Num sistema completamente hemisimétrico são nulas tôdas as componentes em que figurem índices repetidos, pois, por exemplo, de $a_{ijk} = -a_{jik}$ resulta, quando $j = i$, $a_{iik} = -a_{iik}$, donde $a_{iik} = 0$.

Por exemplo, *o sistema duplo hemisimétrico* a_{ik} tem por componentes $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$.

O sistema triplo completamente hemisimétrico a_{ijk} tem só seis componentes não nulas, pois as 21 componentes em que há índices iguais são nulas; as seis não nulas têm tôdas o mesmo valor absoluto, o de a_{123}, e o sinal de a_{123}, ou o contrário, conforme a permutação ijk fôr par ou ímpar em relação a $1, 2, 3$.

São particularmente importantes:

a) o sistema duplo simétrico de componentes δ_{ik} [δ de Kronecker **1**, **7**, 48)]

43) $$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \leftarrow i = k \\ 0 \leftarrow i \neq k; \end{cases}$$

b) o sistema triplo hemisimétrico (completamente) e_{ijk} em que $e_{123} = 1$. Pelo que acima foi dito, tem-se, como componentes dêste sistema,

44) $$e_{ijk} = \begin{cases} 0 \leftarrow \text{dois índices (pelos menos) iguais} \\ +1 \leftarrow \text{permutação par dos índices} \\ -1 \leftarrow \text{permutação ímpar dos índices.} \end{cases}$$

II. — **Tensores simétricos e hemisimétricos.** Seja T um tensor cujas componentes, num dado sistema cartesiano rectangular, formam um sistema simétrico ou hemisimétrico. Vamos provar que *o carácter simétrico ou hemisimétrico do sistema é invariante com as transformações ortogonais.*

Seja, como exemplo, um tensor duplo t_{ij}; feita a transformação ortogonal $\bar{x}_j = \alpha_{jr} . x_r$ (com a convenção de supressão do sinal de somatório) as componentes transformam-se por [7, 41 *a*)]

$$\bar{t}_{ij} = \alpha_{ri} . \alpha_{sj} . t_{rs}$$

donde

$$\bar{t}_{ji} = \alpha_{rj} . \alpha_{si} . t_{rs} .$$

Trocando, neste segundo membro, *r* com *s*, o que o não altera por serem *r* e *s* índices mudos, vem $\bar{t}_{ji} = \alpha_{sj} . \alpha_{ri} . t_{sr}$ e, por conseqüência, conforme fôr $t_{sr} = t_{rs}$ ou $t_{sr} = - t_{rs}$ assim virá $\bar{t}_{ji} = \bar{t}_{ij}$ ou $\bar{t}_{ji} = - \bar{t}_{ij}$.

A demonstração generaliza-se fàcilmente para uma ordem qualquer.

Daqui resulta que se pode definir *tensor simétrico* ou *hemisimétrico* como aquele cujas componentes formam, num dado sistema cartesiano rectangular, e portanto em qualquer outro, um sistema simétrico ou hemisimétrico, respectivamente.

Quando se não fizer menção especial do par de índices em relação ao qual se dá a simetria ou hemisimetria, entender-se há que elas são *completas*. Assim, as designações: tensor hemisimétrico, tensor simétrico, significam, respectivamente, tensor completamente hemisimétrico, tensor completamente simétrico.

São particularmente importantes os dois tensores que a seguir vamos estudar.

a) *O tensor fundamental ou unitário* Δ.

É o tensor duplo simétrico cujas componentes formam o sistema δ_{ik} [43)].

As componentes dêste tensor são invariantes com as transformações ortogonais. Tem-se, com efeito, efectuada a transformação $x_j = \alpha_{jr} . \bar{x}_r$ [7, 41 *a*)]

$$\bar{\delta}_{ik} = \alpha_{ri} . \alpha_{sk} . \delta_{rs} = \sum_r \alpha_{ri} . (\sum_s \alpha_{sk} . \delta_{rs}) = \sum_r \alpha_{ri} . \alpha_{rk}$$

ou seja, em virtude de 3, 13), $\bar{\delta}_{ik} = \delta_{ik}$ o que prova a invariância.

Pode, por conseqüência, definir-se o tensor fundamental ou unitário como aquele que em qualquer sistema cartesiano rectangular tem as componentes δ_{ik}.

b) *O tensor E.*

É o tensor triplo hemisimétrico cujas componentes formam o sistema e_{ijk} [44)].

Vejamos como se transformam as componentes quando se faz uma transformação ortogonal de coordenadas: $x_j = \alpha_{jr} . \bar{x}_r$. É [7, 41 *a*)] $\bar{e}_{ijk} = \alpha_{ri} . \alpha_{sj} . \alpha_{tk} . e_{rst}$.

Como e_{rst} se anula desde que os índices não sejam todos diferentes [44)], o somatório do segundo membro tem apenas seis termos, correspondentes às seis permutações simples dos números *1, 2, 3* e de 44) resulta que três dêsses termos, os que correspondem a permutações pares, são positivos e os outros três negativos; isto é, chamando *p* ao número que determina a paridade da permutação *rst*, tem-se

$$\bar{e}_{ijk} = \sum (-1)^p \alpha_{ri} . \alpha_{sj} . \alpha_{tk} = \begin{vmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{2j} & \alpha_{2k} \\ \alpha_{3i} & \alpha_{3j} & \alpha_{3k} \end{vmatrix}$$

e êste determinante é: nulo se *i*, *j* e *k* não são todos distintos; igual a $+ \delta(D) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ se a permutação *i*, *j* e *k* fôr par e igual a $-\delta(D)$ se ela fôr ímpar.

Tem-se, por conseqüência, que:

1.º — se $\theta(D) = +1$, $\overline{e}_{ijk}$ toma exactamente os mesmos valores que 44) dá para e_{ijk}, logo *as componentes do tensor* E *são invariantes com a transformação ortogonal ;*

2.º — se $\theta(D) = -1$, $\overline{e}_{ijk}$ anula-se nas mesmas condições que e_{ijk} mas as componentes não nulas vêm tôdas com sinal trocado, não havendo, portanto, pròpriamente invariância, mas sim uma troca de sinal em tôdas as componentes.

Êste carácter do tensor E reflecte-se nas suas aplicações geométricas, como adiante se verá.

Passamos agora ao estudo da *Álgebra Tensorial.*

II. — ÁLGEBRA TENSORIAL

9. — **Adição.** *Definição.* Sejam T_1 e T_2 dois tensores duplos, de componentes, respectivamente, a_{ij} e b_{ij}; construamos o sistema duplo C cujas componentes

$$45) \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

são as somas das componentes correspondentes (com os mesmos índices) de T_1 e T_2. É fácil ver que, para uma transformação ortogonal, as componentes de C se transformam segundo as leis 7, 40) e 41) que definem os tensores. Efectivamente, pela transformação $x_j = \sum_k \alpha_{jk} . \overline{x}_k$ [1, 6)] tem-se [7, 40)]

$a_{ij} = \sum_{rs} \alpha_{ir} . \alpha_{js} . \overline{a}_{rs}$ e $b_{ij} = \sum_{rs} \alpha_{ir} . \alpha_{js} . \overline{b}_{rs}$ donde

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = \sum_{rs} \alpha_{ir} . \alpha_{js} . (\overline{a}_{rs} + \overline{b}_{rs})$ isto é, introduzindo a componente transformada $\overline{c}_{rs} = \overline{a}_{rs} + \overline{b}_{rs}$,

$$46) \qquad c_{ij} = \sum_{rs} \alpha_{ir} . \alpha_{js} . \overline{c}_{rs}$$

e esta igualdade, juntamente com a recíproca

$$46\,a) \qquad \overline{c}_{ij} = \sum_{rs} \alpha_{ri} . \alpha_{sj} . c_{rs}$$

que fàcilmente se estabelece também, prova que *o sistema C é um tensor em relação à transformação ortogonal encarada.*

A êsse tensor C chama-se *soma* dos dois tensores dados T_1 e T_2 (adendos) e pela igualdade 45) é definida a *adição tensorial.* Os raciocínios feitos e definições dadas generalizam-se, como é óbvio, para uma ordem qualquer — a *mesma* nos dois tensores adendos — e estendem-se também imediatamente à adição de mais de duas parcelas (número qualquer finito).

Propriedades. Verifica-se fàcilmente que a adição de tensores goza das propriedades da adição ordinária:

a) a soma $T_1 + T_2$ de dois tensores é um tensor;

b) a soma de T com o tensor nulo da sua ordem é igual a T;

c) a operação é comutativa — $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$;

d) é associativa — $T_1 + T_2 + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3) = (T_1 + T_2) + T_3$;

e) de $T_1 = T_2$ resulta $T_1 + T_3 = T_2 + T_3$ e, recìprocamente, de $T_1 + T_3 = T_2 + T_3$ resulta $T_1 = T_2$.

Com base nestas propriedades, pode definir-se, duma maneira análoga à habitual, *diferença de tensores* e a definição pode ser dada em duas étapes:

a) Dado um tensor T, existe um e um só tensor T' tal que $T + T' = 0$; com efeito, se são a_{ij} as componentes de T, a esta igualdade satisfaz o tensor T' de componentes $-a_{ij}$, *único*, porque de $T + T' = 0 = T + T''$ resulta $T' = T''$; do carácter *absoluto* da equação $T + T' = 0$, [7, 5.ª, b)] resulta, em seguida, que as componentes de T' em qualquer sistema são iguais e de sinais contrários às de T.

b) Dados os tensores T_1 e T_2, define-se *diferença* $T_1 - T_2$ pela igualdade

$$47) \qquad T_1 - T_2 = T_1 + T'_2 \qquad \leftarrow T_2 + T'_2 = 0$$

e do que está dito resulta que, se são a_{ij} as componentes de T_1 e b_{ij} as de T_2, as de $T_1 - T_2$ são $a_{ij} - b_{ij}$.

A adição e subtracção podem englobar-se numa operação única — *adição algébrica.*

10. — **Multiplicação. A. Multiplicação de tensores.** Sejam os tensores T_1 e T_2, de ordens diferentes, por exemplo T_1 de

ordem *2* com o sistema de componentes a_{ij} e T_2 de ordem *3* com o sistema de componentes b_{klm}. Construamos o sistema C cujas componentes se obtêm multiplicando cada componente de T_1 por cada uma de T_2, numa ordem prefixada:

48) $$c_{ijklm} = a_{ij} \cdot b_{klm};$$

é claro que C é um sistema de 5.ª ordem $\rightarrow 3^5$ componentes.

Vamos ver que estas componentes obedecem, para as transformações ortogonais, às leis 7, 40) e 41) que definem a entidade tensor. Efectivamente, fazendo a transformação ortogonal $x_j = \sum_k \alpha_{jk} \cdot \bar{x}_k$ [1, 6)] e definindo, no novo sistema, a componente transformada $\bar{a}_{rs} \cdot \bar{b}_{tuv} = \bar{c}_{rstuv}$, vem, sucessivamente,

$$c_{ijklm} = a_{ij} \cdot b_{klm} = \sum_{rs} \alpha_{ir} \cdot \alpha_{js} \cdot \bar{a}_{rs} \cdot \sum_{tuv} \alpha_{kt} \cdot \alpha_{lu} \cdot \alpha_{mv} \cdot \bar{b}_{tuv} \text{ donde}$$

49) $$c_{ijklm} = \sum_{rstuv} \alpha_{ir} \cdot \alpha_{js} \cdot \alpha_{kt} \cdot \alpha_{lu} \cdot \alpha_{mv} \cdot \bar{c}_{rstuv}$$

que é da forma 7, 40). Verificava-se anàlogamente a transformação inversa, de modo que a igualdade 48) pode ser tomada para definição da operação de *multiplicação de tensores;* ao sistema c_{ijklm} por ela definido chama-se *tensor produto* dos dois tensores T_1 e T_2. A extensão ao caso de os dois tensores serem de ordens quaisquer e de se tratar de um número finito qualquer de factores é imediata e tem-se que *o tensor produto é de ordem igual à soma das ordens dos factores.*

O produto tensorial de vectores, definido no parágrafo 7, é um caso particular do produto de tensores, agora definido. Quanto às *propriedades*, verificam-se as habituais da operação da multiplicação, à excepção da comutatividade. Efectivamente:

a) O produto de dois tensores é um tensor.

b) De $T = 0$ resulta, qualquer que seja T_1, $T \cdot T_1 = 0$ e recìprocamente, de $T \cdot T_1 = 0$ resulta ou $T = 0$ ou $T_1 = 0$. A primeira parte é imediata porque se um dos sistemas tem tôdas as componentes nulas, o sistema produto 48) também as tem tôdas nulas e o anulamento mantém-se depois de qualquer transformação ortogonal [7, 5.ª]; quanto à segunda parte, é evidente que se nenhum dos sistemas é nulo há em cada um dêles pelo menos uma componente não nula e há, por conseqüência, no produto, uma componente não nula.

c) A operação não é comutativa; quando se troca a ordem dos factores obtêm-se as mesmas componentes mas *por ordem diferente*, se não se alterou a lei de formação delas; por exemplo, os produtos tensoriais dos vectores **i** e **j** são $\mathbf{i}.\mathbf{j}=(1,0,0).(0,1,0)=(0,1,0,0,0,0,0,0,0)$ e $\mathbf{j}.\mathbf{i}=(0,1,0).(1,0,0)=(0,0,0,1,0,0,0,0,0)$ (efectuando, em ambos os casos, o produto da primeira componente do primeiro, por tôdas as do segundo, etc.). A comutatividade só se conservaria, modificando a lei de formação das componentes do produto quando se trocam os factores (V. Paul Appell, *Traité de Mécanique Rationelle*, tomo V, pg. 32, nota).

d) De $T_1=T_2$ resulta $T_1.T_3=T_2.T_3$ (é evidente) e de $T_1.T_3=T_2.T_3$ resulta $T_1=T_2$ porque em cada uma das componentes, e com conservação de ordem, se verifica esta propriedade.

e) A operação é associativa, por uma razão análoga.

f) É distributiva em relação à adição (ainda pela mesma razão).

Como caso particular da operação da multiplicação, define-se, como habitualmente, a potenciação de expoente inteiro e positivo.

B. **Multiplicação dum tensor por um número real.** Define-se esta operação como caso particular da anterior. Seja o número real ρ, invariante com os sistemas cartesianos rectangulares. Como ρ pode ser considerado como um *tensor de ordem zero* [7, 2.ª] o produto $\rho.T$ está definido e é claro que, se são $a_{ij\ldots l}$ as componentes de T, são $\rho.a_{ij\ldots l}$ as do tensor $\rho.T$.

Desta definição resultam imediatamente as propriedades seguintes:

a) O produto $\rho.T$ é um tensor;

b) de $\rho=0$ ou $T=0$ resulta $\rho.T=0$ e, reciprocamente, de $\rho.T=0$ resulta $\rho=0$ ou $T=0$;

c) de $\rho = \sigma$ resulta $\rho . T = \sigma . T$, de $T_1 = T_2$ resulta $\rho . T_1 = \rho . T_2$;

d) de $\rho \neq 0$ e $\rho . T_1 = \rho . T_2$ resulta $T_1 = T_2$, de $T \neq 0$ e $\rho . T = \sigma . T$ resulta $\rho = \sigma$;

e) $(\rho + \sigma) . T = \rho . T + \sigma . T$;

f) $\rho . (T_1 + T_2) = \rho . T_1 + \rho . T_2$;

g) $\rho . (\sigma . T) = \sigma . (\rho . T) = (\rho . \sigma) . T$;

h) $\rho . T = T . \rho$.

Das propriedades *a*) a *g*), juntamente com as propriedades da adição de tensores [**9**] conclue-se que *o conjunto dos tensores em cada ordem forma um sistema linear* [**1, 5**].

11. — **Composição Tensorial.** Sejam dados dois tensores, T_1 duplo, de componentes a_{ij}, e T_2 triplo, de componentes b_{klm}, e construamos o sistema

$$c_{jlm} = \sum_i a_{ij} . b_{ilm} \qquad 50)$$

que se obtém igualando dois índices, um em cada sistema, efectuando a multiplicação tensorial dos dois sistemas obtidos e somando, em seguida, em relação ao índice tornado comum; é claro que o novo sistema assim formado não é de 5.ª ordem mas sim de 3.ª, visto que, no segundo membro de 50), há apenas três índices *livres* j, l, m.

Vamos provar que *o sistema* c_{jlm} *constitue o sistema das componentes dum tensor em relação à transformação ortogonal* $x_j = \sum_k \alpha_{jk} . \overline{x}_k$ [**1**, 6)]. Efectivamente, fazendo essa transformação, donde $a_{ij} = \sum_{rs} \alpha_{ir} . \alpha_{js} . \overline{a}_{rs}$ e $b_{ilm} = \sum_{tuv} \alpha_{it} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \overline{b}_{tuv}$, e definindo componente transformada $\overline{c}_{suv}$, no novo sistema, pela igualdade $\overline{c}_{suv} = \sum_r \overline{a}_{rs} . \overline{b}_{ruv}$, análoga a 50), obtém-se sucessivamente

$$c_{jlm} = \sum_i a_{ij} . b_{ilm} = \sum_i \sum_{rs} \alpha_{ir} . \alpha_{js} . \overline{a}_{rs} . \sum_{tuv} \alpha_{it} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \overline{b}_{tuv}$$

$$= \sum_{rstuv} (\sum_i \alpha_{ir} . \alpha_{it}) . \alpha_{js} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \overline{a}_{rs} . \overline{b}_{tuv}$$

$$= \sum_{rstuv} \delta_{rt} . \alpha_{js} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \overline{a}_{rs} . \overline{b}_{tuv}$$

$$= \sum_{suv} \alpha_{js} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \sum_r \overline{a}_{rs} . \sum_t \delta_{rt} . \overline{b}_{tuv}$$

$$= \sum_{suv} \alpha_{js} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \sum_r \overline{a}_{rs} . \overline{b}_{ruv} \qquad \text{isto é,}$$

51) $$c_{jlm} = \sum_{suv} \alpha_{js} . \alpha_{lu} . \alpha_{mv} . \overline{c}_{suv};$$

c_{jlm} transforma-se, portanto, em obediência à lei 7, 40).

Duma maneira análoga se verificava a transformação inversa, de modo que c_{jlm} é o sistema das componentes dum tensor triplo. É à operação definida por 50) que se chama *composição tensorial* e ao tensor por ela obtido chama-se *tensor contraído* a partir do primitivo tensor de 5.ª ordem $a_{ij} . b_{klm}$.

Como se vê, a operação fêz-se *saturando* um par de índices, um em cada tensor; da própria operação se deduz que pela saturação de um par de índices se obtém o *abaixamento de duas unidades* na ordem do produto.

Esta operação estende-se a tensores de ordem qualquer, não sendo indispensável que se tenha efectuado prèviamente um produto — a igualização de dois índices, seguida duma soma no índice tornado comum, denomina-se então uma *contracção,* que é revelada no abaixamento de duas unidades na ordem do tensor. É claro que se podem fazer contracções e composições sucessivas ou simultâneas, tantas quantos os pares de índices disponíveis.

Vejamos alguns exemplos.

I. — **Contracção do produto tensorial de dois vectores.** Sejam os dois vectores $\mathbf{v}_1 = \sum_k x_k . \mathbf{i}_k$ e $\mathbf{v}_2 = \sum_k y_k . \mathbf{i}_k$. O seu produto tensorial é o tensor de 2.ª ordem de componentes $c_{ij}=x_i.y_j$ [**7**, 23)] e contraíndo-o obtém-se, por 50), o escalar $\sum_i x_i.y_i$ ou seja *o produto escalar* [**1**, **13**, 94)] *dos dois vectores.*

II. — **Composição do tensor E com um vector.** Seja o vector $\mathbf{v}=\sum_k a_k.\mathbf{i}_k$ e o tensor E [**8**, II, *b*)]. Fazendo o produto com contracção (saturação dum índice de E com o do vector) obtém-se o tensor duplo de componentes

$$c_{jk}=\sum_i a_i.e_{ijk}=a_1.e_{1jk}+a_2.e_{2jk}+a_3.e_{3jk}.$$

Para calcular estas componentes recordemos que, por definição do sistema e_{ijk}, é

8, 44) $$e_{ijk}=\begin{cases} 0 \leftarrow \text{dois índices (pelo menos) iguais} \\ +1 \leftarrow \text{permutação par dos índices} \\ -1 \leftarrow \text{permutação ímpar dos índices.} \end{cases}$$

Obtém-se, por conseqüência,

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_1.e_{111}+a_2.e_{211}+a_3.e_{311}=0 \\
c_{12} &= a_1.e_{112}+a_2.e_{212}+a_3.e_{312}=a_3 \\
c_{13} &= a_1.e_{113}+a_2.e_{213}+a_3.e_{313}=-a_2 \\
c_{21} &= a_1.e_{121}+a_2.e_{221}+a_3.e_{321}=-a_3 \\
c_{22} &= a_1.e_{122}+a_2.e_{222}+a_3.e_{322}=0 \\
c_{23} &= a_1.e_{123}+a_2.e_{223}+a_3.e_{323}=a_1 \\
c_{31} &= a_1.e_{131}+a_2.e_{231}+a_3.e_{331}=a_2 \\
c_{32} &= a_1.e_{132}+a_2.e_{232}+a_3.e_{332}=-a_1 \\
c_{33} &= a_1.e_{133}+a_2.e_{233}+a_3.e_{333}=0
\end{aligned}$$

isto é, um *tensor duplo hemisimétrico*, cujas componentes constituem a matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Como se vê, *as três coordenadas do vector* **v** *bastam para definir o tensor duplo obtido.*

Procuremos o tensor transformado dêste tensor quando se efectua a transformação ortogonal $x_1 = \overline{x}_2,\ x_2 = \overline{x}_1,\ x_3 = \overline{x}_3$. O *operador* desta transformação é $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ (1, final do parágrafo) e ela corresponde a uma mudança de *axialidade* do espaço [1, 12, V].

Tem-se, das fórmulas de transformação [7, 41)],

$$\begin{aligned} \overline{c}_{jk} = \sum_{rs} \alpha_{rj} . \alpha_{sk} . c_{rs} = \alpha_{1j} . (\alpha_{1k} . c_{11} + \alpha_{2k} . c_{12} + \alpha_{3k} . c_{13}) + \\ + \alpha_{2j} . (\alpha_{1k} . c_{21} + \alpha_{2k} . c_{22} + \alpha_{3k} . c_{23}) + \\ + \alpha_{3j} . (\alpha_{1k} . c_{31} + \alpha_{2k} . c_{32} + \alpha_{3k} . c_{33}) \end{aligned}$$

donde, efectuando e substituindo,

$$\overline{c}_{11} = c_{22} = 0,\ \overline{c}_{12} = c_{21} = -a_3,\ \overline{c}_{13} = c_{23} = a_1,$$
$$\overline{c}_{21} = c_{12} = a_3,\ \overline{c}_{22} = c_{11} = 0,\ \overline{c}_{23} = c_{13} = -a_2,$$
$$\overline{c}_{31} = c_{32} = -a_1,\ \overline{c}_{32} = c_{31} = a_2,\ \overline{c}_{33} = c_{33} = 0,$$

isto é, as componentes do novo tensor formam a matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & -a_3 & a_1 \\ a_3 & 0 & -a_2 \\ -a_1 & a_2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Obtém-se, portanto, um novo tensor hemisimétrico que se forma do anterior mudando a_1 em $-a_2$, a_2 em $-a_1$ e

a_3 em $-a_3$; é êste o resultado produzido sôbre o tensor considerado pela mudança de axialidade do espaço.

Êste resultado pode ser interpretado geomètricamente do modo seguinte: — consideremos o *vector axial* [**1**, 12, V] de coordenadas a_1, a_2, a_3; mudemos a axialidade do espaço, isto é, efectuemos a transformação $x_1 = \overline{x}_2$, $x_2 = \overline{x}_1$, $x_3 = \overline{x}_3$; como o vector é, por hipótese, axial, êle muda de sentido, logo as suas coordenadas trocam o sinal e, além disso, troca-se o nome das duas primeiras, isto é, a_1 muda em $-a_2$, a_2 em $-a_1$, a_3 em $-a_3$, exactamente a modificação produzida sôbre as componentes do tensor hemisimétrico acima considerado. *Os vectores axiais não são portanto mais que interpretações geométricas de tensores especiais de 2.ª ordem.*

Esta interpretação geométrica é impossível de conseguir, *em geral*, com um vector livre, visto que, como fàcilmente se verifica[1], a mudança de axialidade produz nele apenas a troca do nome das duas primeiras coordenadas: $\overline{a}_1 = a_2$, $\overline{a}_2 = a_1$, $\overline{a}_3 = a_3$; só o vector particular $\mathbf{v} = k.(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)$ se transforma no seu oposto pela mudança de axialidade.

A interpretação geométrica é também impossível de conseguir em espaços euclideanos a mais de três dimensões, visto que, então, o número de coordenadas do vector e o número de componentes distintas do tensor hemisimétrico de 2.ª ordem não coïncidem; para quatro dimensões, por exemplo, são *quatro* as coordenadas do vector e *seis* os números não nulos que definem a matriz hemisimétrica.

III. — **Composição do tensor E com o produto tensorial de dois vectores.** Sejam os dois vectores $\mathbf{v}_1 = \sum_k a_k . \mathbf{i}_k$, $\mathbf{v}_2 = \sum_k b_k . \mathbf{i}_k$; efectuemos o seu produto tensorial e componhámo-lo com o tensor E, saturando dois pares de índices; obtém-se o tensor *simples* de componentes

(1) O leitor fará os cálculos respectivos.

$$c_k = \sum_{ij} e_{ijk} . a_i . b_j = e_{11k} . a_1 b_1 + e_{12k} . a_1 b_2 + e_{13k} . a_1 b_3$$
$$+ e_{21k} . a_2 b_1 + e_{22k} . a_2 b_2 + e_{23k} . a_2 b_3$$
$$+ e_{31k} . a_3 b_1 + e_{32k} . a_3 b_2 + e_{33k} . a_3 b_3 .$$

Fazendo $k = 1, 2, 3$ e substituindo os e_{ijk} pelos seus valores [**8**, 44)] como no exemplo II, obtém-se $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $c_2 = - a_1 b_3 + a_3 b_1$, $c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$, isto é, o resultado da composição é o vector $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

IV. — **Composição do tensor E com o produto tensorial de três vectores.** Sejam os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 = \sum_k c_k . \mathbf{i}_k$ e componhamos o seu produto tensorial com o tensor E, saturando três pares de índices; obtém-se o *escalar* $\sum_{ijk} e_{ijk} . a_i . b_j . c_k$ que, pela definição das componentes de E [**8**, 44)], é igual ao determinante dos *nove* elementos a_i, b_j, c_k. É portanto [**1**, **15**, 114)]

$$\sum_{ijk} e_{ijk} . a_i . b_j . c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 .$$

Observação 1.ª. Como se vê, as três operações mais importantes da Álgebra Vectorial, multiplicação escalar, vectorial e mixta, aparecem agora conglobadas numa operação única — composição tensorial.

Observação 2.ª. As composições em que figura o tensor E fornecem resultados influenciados pela axialidade do espaço [v. final do parágrafo **8**].

12. — Bibliografia.

A. McConnell — *Applications of the Absolute Differential Calculus.* Londres, 1936.

U. Cisotti — *Lezioni di Calcolo Tensoriale.* Milão, 1928.

G. Juvet — *Introduction au Calcul Tensoriel et au Calcul Différentiel Absolu.* Paris, 1922.

H. Jeffreys — *Cartesian Tensors.* Cambridge, 1931.

P. Appell — *Traité de Mécanique Rationelle.* Tomo 5.º. Paris, 1926.

Exercícios

I. — Determinar o aspecto das fórmulas de transformação de coordenadas cartesianas rectangulares quando os dois sistemas têm a mesma origem e mesmo eixo Oz e aos eixos Ox e Oy se dá uma rotacão de ângulo ϱ no sentido directo.

II. — Dado o tensor de 2.ª ordem t_{ik}, provar:

a) que o tensor $t_{ik} + t_{ki}$ é simétrico;

b) que o tensor $t_{ik} - t_{ki}$ é hemisimétrico;

c) que o tensor t_{ik} se pode decompôr na soma de dois tensores de 2.ª ordem, um simétrico e outro hemisimétrico.

III. — Estudar o efeito da mudança de axiálidade do espaço sôbre um vector livre.

IV. — Efectuar as seguintes composições de tensores:

a) do tensor fundamental com o tensor E, fazendo a saturação de dois pares de índices;

b) do tensor E consigo próprio, fazendo a saturação de dois pares de índices;

c) do tensor E com o cubo do tensor fundamental, fazendo a saturação de três pares de índices.

CAPÍTULO III

ANÁLISE VECTORIAL

I. INFINITÉSIMOS

1. — **Introdução.** No estudo de tôdas as operações vectoriais tratadas no capítulo 1.º — Álgebra Vectorial — ignorou-se sempre se as coordenadas dos vectores são constantes ou, porventura, funções de quaisquer variáveis; tôdas essas operações são igualmente válidas num e noutro caso. A descriminação é, no entanto, necessária, desde que se queiram fazer certas aplicações, geométricas e físicas, do Cálculo Vectorial. Vejamos três casos importantes.

a) Dada uma *curva,* torsa em geral, tomemos um ponto fixo O do espaço (fig. 37) e consideremos a multiplicidade dos vectores com origem em O e extremidade nos pontos P da curva; a cada ponto P corresponde um vector **r** da multiplicidade e o vector geral da multiplicidade é, por conseqüência, *função* do ponto P: **r**(P); ao *facto geométrico* de que a curva é o *logar* dos pontos P, corresponde a *descrição vectorial* da curva pelo vector geral **r**(P) da multiplicidade. Ao vector **r**(P) dá-se o nome de *vector-espaço* (Ortsvektor) da curva e a esta o de *odógrafa* (ὁδός = caminho) do vector.

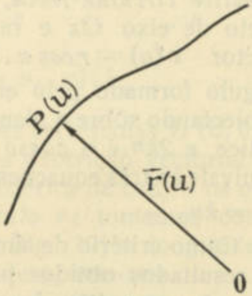


Fig. 37

Ora, sabe-se da Geometria Analítica, que, em relação a um sistema cartesiano de referência, as coordenadas do ponto *corrente* P da curva podem ser dadas em função dum parâmetro u: $x_1 = \varphi_1(u)$, $x_2 = \varphi_2(u)$, $x_3 = \varphi_3(u)$; se chamarmos α_1, α_2, α_3 às coordenadas, *constantes*, do ponto fixo O, ter-se há, para coordenadas do vector-espaço $\mathbf{r}$(P), $x_1 - \alpha_1 = \psi_1(u)$, $x_2 - \alpha_2 = \psi_2(u)$, $x_3 - \alpha_3 = \psi_3(u)$ o que exprimiremos abreviadamente dizendo que o vector $\mathbf{r}$(P) é função do parâmetro u e escrevendo simplesmente $\mathbf{r}(u)$; é claro que

1) $$\mathbf{r}(u) = \sum_k \psi_k(u) \, . \, \mathbf{i}_k \, .$$

e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ é a equação vectorial da odógrafa.

Por exemplo a *recta* que passa pelo ponto $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e é paralela ao vector $\mathbf{v} = \sum_k l_k \, . \, \mathbf{i}_k$, é descrita vectorialmente pelo vector $\mathbf{r}(\lambda) = \sum_k (\alpha_k + l_k . \lambda) \, . \, \mathbf{i}_k$ [1, 10, 57)] e esta igualdade equivale às três igualdades cartesianas, equações da recta, $x_1(\lambda) = \alpha_1 + l_1 . \lambda$, $x_2(\lambda) = \alpha_2 + l_2 . \lambda$, $x_3 = \alpha_3 + l_3 . \lambda$; a *hélice circular recta*, existente sôbre um cilindro circular recto de eixo Oz e raio r, é descrita vectorialmente pelo vector $\mathbf{r}(u) = r \cos u \, . \, \mathbf{i}_1 + r \operatorname{sen} u \, . \, \mathbf{i}_2 + ku \, . \, \mathbf{i}_3$ onde u é o ângulo formado pelo eixo Ox com a semi-recta OM obtida projectando sôbre o plano Ox, y, em M, o ponto corrente P da hélice, e $2k\pi$ é o *passo* da hélice; aquela igualdade vectorial equivale às três equações cartesianas $x_1 = r \cos u$, $x_2 = r \operatorname{sen} u$, $x_3 = ku$.

Como critério de simplicidade, quando houver que traduzir os resultados obtidos por via vectorial em linguagem cartesiana, tomar-se hão eixos rectangulares com origem no ponto O, origem do vector-espaço.

b) O que está dito generaliza-se imediatamente para as *superfícies*.

A *descrição vectorial* da superfície faz-se ainda por um vector-espaço $\mathbf{r}$(P) (fig. 38) e êsse vector é agora função de dois parâmetros u e v visto que dependem de dois parâme-

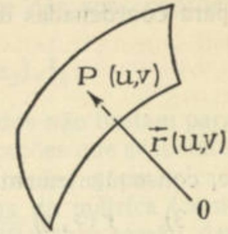


Fig. 38

tros, como se sabe da Geometria Analítica, as coordenadas cartesianas do ponto corrente da superfície. A superfície diz-se ainda odógrafa do vector $\mathbf{r}(u, v)$. A equação da superfície é, então,

$$2) \qquad \mathbf{r}(u, v) = \sum_k \psi_k(u, v) \,.\, \mathbf{i}_k,$$

mas para que esta equação, equivalente às três equações cartesianas $x_1 = \psi_1(u, v)$, $x_2 = \psi_2(u, v)$, $x_3 = \psi_3(u, v)$, represente de facto uma superfície, e não degenere numa linha, a matriz $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{matrix} \right\|$ deve ter característica igual a *2* pois, caso contrário, das três funções x_1, x_2, x_3, não haveria duas independentes.

Exemplo. O *plano* passsando pelo ponto $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ paralelamente aos dois vectores $\mathbf{v}_1 = \sum_k l_k \,.\, \mathbf{i}_k$, $\mathbf{v}_2 = \sum_k m_k \,.\, \mathbf{i}_k$ é descrito vectorialmente pelo vector

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \sum_k (\alpha_k + l_k \,.\, \lambda + m_k \,.\, \mu) \,.\, \mathbf{i}_k$$

e esta igualdade equivale às três equações cartesianas **1, 10,** 63).

Como outro exemplo, deduzamos a descrição vectorial da superfície esférica de centro na origem e de raio r; tomemos como parâmetros (fig. 39) a longitude φ e a colatitude θ; tem-se

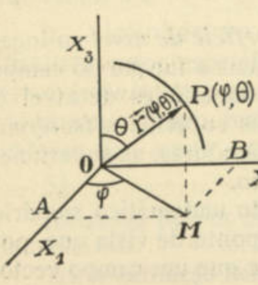


Fig. 39

$$x_1 = \overline{OA} = \overline{OM} \,.\, \cos\varphi,$$
$$x_2 = \overline{OB} = \overline{OM} \,.\, \operatorname{sen}\varphi,$$
$$x_3 = \overline{MP} = \overline{OP} \,.\, \cos\theta;$$

e como $\overline{OP} = r$ e

$\overline{OM} = \overline{OP} \,.\, \operatorname{sen}\theta = r \operatorname{sen}\theta$, tem-se para coordenadas do ponto corrente P

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\, sen\,\theta \\ x_2 = r\, sen\,\varphi\, sen\,\theta \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

e, conseqüentemente, para vector-espaço,

3) $$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = r\cos\varphi\, sen\,\theta \,.\, \mathbf{i}_1 + r\, sen\,\varphi\, sen\,\theta \,.\, \mathbf{i}_2 + \\ + r\cos\theta \,.\, \mathbf{i}_3 .$$

c) **Noção de Campo.** Os dois casos que acabam de ser vistos são os que directamente interessam nas aplicações geométricas; nas aplicações físicas, porém, o caso mais importante põe-se de modo diferente — intervém, como fundamental, o conceito de *campo.*

Seja uma região do espaço e a cada ponto P dela liguemos uma grandeza, de natureza escalar ou vectorial; à região assim *completada* com a função f(P) chama-se um campo — *campo escalar* ou *campo vectorial* conforme f(P) fôr um escalar ou um vector. A função f(P) chama-se *função do campo.*

Exemplos. A distribuïção de temperaturas numa certa região do espaço, o potencial dum campo electrostático, constituem exemplos de campos escalares; a função do campo é aqui a lei pela qual varia a temperatura ou o potencial de ponto para ponto. O momento resultante dum sistema de vectores *deslizantes* em relação a um ponto do espaço [**1**, 19], o vector intensidade dum campo magnético, constituem exemplos de campos vectorais.

Num campo escalar, chama-se *superfície de nível* ao logar geométrico dos pontos do campo nos quais a função do campo toma o mesmo valor; a equação das superfícies de nível é, portanto, $f(\mathrm{P}) = const.$ Exemplos: as superfícies *isotérmicas* dum campo de distribuïção de temperaturas, as superfícies *equipotenciais* dum campo electrostático.

Adiante (cap. 4.°) será feito o estudo matemático sumário dos campos, escalares e vectoriais; do ponto de vista que, por agora, nos interessa, salientemos apenas que um campo vectorial é afinal definido por um vector $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ visto que $\mathbf{r}$, dependendo do ponto P, depende das suas coordenadas. A decomposição cartesiana de $\mathbf{r}$ é

4) $$\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = \sum_k \psi_k(x_1, x_2, x_3) \, . \, \mathbf{i}_k \, .$$

Os métodos vectoriais até aqui estudados não bastam para as necessidades do novo domínio de aplicações que acabamos de entrever. Para nos limitarmos às aplicações geométricas, recordemos que a resolução de problemas de métrica (comprimentos de arco, áreas) e de curvatura (flexão e torsão das curvas torsas, curvatura das superfícies e das curvas traçadas sôbre uma superfície) exigem a consideração de elementos infinitesimais, tanto de curvas como de superfícies — aparecerão, conseqüentemente, vectores de módulo inferior a todo o número positivo e, na criação do aparelho formal até aqui estudado, êles não fôram tomados em consideração. A mesma necessidade aparece na teoria matemática dos campos.

Impõe-se, portanto, o completar a aparelhagem formal de que dispomos, com a inclusão dos conceitos infinitesimais. Consideraremos, para isso, os três casos: $\mathbf{r}(u)$, $\mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ e faremos sôbre os vectores e suas coordenadas nas decomposições 1) 2) e 4) as suposições seguintes, *das quais não sairemos*;

a) *univocidade* — que a cada ponto P corresponde um e um só vector, ou, que o sistema das três funções coordenadas determina um e um só vector;

b) *continuïdade, derivabilidade,* total ou parcial, até à ordem que fôr exigida pelos cálculos, das funções coordenadas do vector $\mathbf{r}$.

2. — **Infinitésimo. Definições.** Seja o vector $\mathbf{r}$, em qualquer dos três casos especificados no parágrafo anterior; diz-se que êle é *infinitésimo* quando o seu módulo o fôr, isto é, quando, dado um número real positivo δ, qualquer, houver sempre valores de $mod\,\mathbf{r}$ tais que

5) $$mod\,\mathbf{r} < \delta \, .$$ [1]

Interessa porém completar a definição, introduzindo a loca-

(1) A definição fica assim reduzida à de infinitésimos de funções escalares, tratados na Análise ordinária.

lização do valor do parâmetro ou parâmetros de que o vector depende e para o qual êle se torna infinitésimo.

Comecemos por supôr que *o vector é função dum parâmetro* $u \rightarrow \mathbf{r}(u)$.

Diz-se que o vector $\mathbf{r}(u)$ é *infinitésimo no valor* u_0 *do parâmetro* ou que é *infinitésimo com* $\Delta u = u - u_0$ quando o seu módulo o fôr, isto é, quando a todo o número real positivo δ fôr possível fazer corresponder outro número real positivo $\varepsilon(\delta)$ tal que a desigualdade $|u - u_0| < \varepsilon(\delta)$ arraste a desigualdade $mod\,\mathbf{r}(u) < \delta$

6) $$|u - u_0| < \varepsilon(\delta) \rightarrow mod\,\mathbf{r}(u) < \delta.$$

Propriedades. 1.ª. — *A soma de dois vectores infinitésimos com* $u - u_0$ *é um vector infinitésimo com* $u - u_0$.

Sejam $\mathbf{r}_1(u)$ e $\mathbf{r}_2(u)$ infinitésimos com $u - u_0$. Tem-se $mod[\mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_2(u)] \leqslant mod\,\mathbf{r}_1(u) + mod\,\mathbf{r}_2(u)$ e como, dado $\frac{\delta}{2}$ positivo qualquer, é possível determinar $\varepsilon'(\delta)$ e $\varepsilon''(\delta)$ tais que $|u - u_0| < \varepsilon'$ arraste $mod\,\mathbf{r}_1(u) < \frac{\delta}{2}$ e $|u - u_0| < \varepsilon''$ arraste $mod\,\mathbf{r}_2(u) < \frac{\delta}{2}$, na parte comum aos dois contornos, isto é, para $|u - u_0| < \varepsilon$, sendo ε o menor dos dois números ε' e ε'', ter-se há $mod\,\mathbf{r}_1(u) + mod\,\mathbf{r}_2(u) < \delta$, logo, *a fortiori*, $mod[\mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_2(u)] < \delta$.

2.ª. — *Se* $\mathbf{r}(u)$ *é infinitésimo com* $u - u_0$, *o produto* $\rho\,.\,\mathbf{r}(u)$, *onde* ρ *é um número real qualquer, é infinitésimo com* $u - u_0$.

A demonstração é análoga à anterior. De ser $\mathbf{r}(u)$ infinitésimo com $u - u_0$ resulta que, dado δ positivo qualquer, é possível determinar $\varepsilon(\delta)$ tal que $|u - u_0| < \varepsilon$ arraste $mod\,\mathbf{r}(u) < \frac{\delta}{|\rho|}$, donde se conclue que

$$mod[\rho\,.\,\mathbf{r}(u)] = |\rho|\,.\,mod\,\mathbf{r}(u) < |\rho|\,.\,\frac{\delta}{|\rho|} = \delta$$

é uma conseqüência de $|u - u_0| < \varepsilon(\delta)$.

3.ª. — *Tôda a combinação linear de vectores infinitésimos com* $u - u_0$ *é um vector infinitésimo com* $u - u_0$.

É conseqüência imediata das duas anteriores.

4.ª. — *O produto escalar e o produto vectorial dum vector por um vector infinitésimo com* $u - u_0$ *são infinitésimos com* $u - u_0$, *escalar no primeiro caso, vectorial no segundo.*

Para o caso do produto escalar, basta recorrer à definição [**1, 13**, 86)] e às propriedades gerais dos infinitésimos da Análise Infinitesimal. Para o caso do produto vectorial, basta notar que pela definição [**1, 11**, 69)] o módulo do produto vectorial é infinitésimo desde que o de um dos vectores o seja.

Passando agora à decomposição cartesiana do vector (as propriedades já estabelecidas são independentes dela) tem-se a propriedade

5.ª. — *É condição necessária e suficiente para que o vector* $\mathbf{r}(u) = \sum_k \varphi_k(u) \, . \, \mathbf{i}_k$ *seja infinitésimo com* $u - u_0$ *que cada uma das* $\varphi_k(u)$ *o seja.*

A condição é necessária. Com efeito, de $mod\, \mathbf{r}(u) = \sqrt{\sum_k [\varphi_k(u)]^2} < \delta$ com $|u - u_0| < \varepsilon(\delta)$ resulta $|\varphi_k(u)| < \delta$ com $|u - u_0| < \varepsilon(\delta)$, logo $\varphi_k(u)$ é infinitésimo com $u - u_0$.

A condição é suficiente. Com efeito, de ser $\varphi_k(u)$ infinitésimo com $u - u_0$, resulta que, dado δ positivo qualquer, se pode determinar $\varepsilon_k(\delta)$ tal que $|u - u_0| < \varepsilon_k(\delta)$ arraste $|\varphi_k(u)| < \frac{\delta}{\sqrt{3}}$, donde, sendo ε o menor dos ε_k, $k = 1, 2, 3$, $|u - u_0| < \varepsilon(\delta)$ arrasta $\sum_k [\varphi_k(u)]^2 < \delta^2$ donde $mod\, \mathbf{r}(u) < \delta$.

Se o vector não é função dum só parâmetro, mas se trata dum $\mathbf{r}(u, v)$ ou dum $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$, mantêm-se tanto a definição como as propriedades vistas; há apenas que atender a que o *ponto* em que $\mathbf{r}$ é infinitésimo não é um u_0 mas sim um (u_0, v_0) ou um (x_1^0, x_2^0, x_3^0) e proceder às modificações convenientes do *contôrno* dentro do qual se verificam as desigualdades — é um problema de Análise Infinitesimal e não de Análise Vectorial.

3. — **Limite. Continuïdade.** Comecemos ainda pelo caso de o vector ser função de um parâmetro u: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.

Definições. 1.ª — Diz-se que o vector $\mathbf{r}(u)$ tem por limite o vector fixo $\mathbf{r}_0$ quando u tende para u_0, e escreve-se $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0$, quando o vector diferença $\mathbf{d}(u) = \mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0$ fôr infinitésimo com $u - u_0$.

2.ª — Diz-se que o vector $\mathbf{r}(u)$ é uma função contínua de u no ponto u_0 quando $\mathbf{r}(u_0) = \mathbf{r}_0$, isto é, quando

$$\lim_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_0). \tag{7}$$

3.ª — Diz-se que o vector $\mathbf{r}(u)$ é uma função contínua de u sôbre um arco de curva (C), quando é função contínua para todos os valores de u correspondentes aos pontos dêsse arco de curva.

Note-se a analogia destas definições com as da Análise Infinitesimal.

Propriedades. 1.ª. *Soma.* — Se $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0$ e $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{s}(u) = \mathbf{s}_0$ é $\lim\limits_{u \to u_0} [\mathbf{r}(u) + \mathbf{s}(u)] = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}_0$.

Efectivamente, fazendo $\mathbf{v}(u) = \mathbf{r}(u) + \mathbf{s}(u)$ e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}_0$, tem-se $\mathbf{v}(u) - \mathbf{v}_0 = [\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0] + [\mathbf{s}(u) - \mathbf{s}_0]$ donde, pelas condições da hipótese e pela propriedade 1.ª do parágrafo anterior, resulta que $\mathbf{v}(u) - \mathbf{v}_0$ é infinitésimo com $u - u_0$, logo pela def. 1.ª, $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{v}(u) = \mathbf{v}_0$.

1.ª *a*) — *Se os vectores* $\mathbf{r}(u)$ e $\mathbf{s}(u)$ *são funções contínuas de u no ponto* u_0, *a sua soma é função contínua de u no ponto* u_0.

É conseqüência imediata da anterior (1.ª) e da def. 2.ª.

1.ª *b*) — *Se os vectores* $\mathbf{r}(u)$ *e* $\mathbf{s}(u)$ *são funções contínuas de u sôbre um certo arco de curva* (C), *sôbre o mesmo arco de curva é contínua a sua soma.*

É conseqüência imediata da anterior [1.ª *a*)] e da def. 3.ª.

2.ª — *Produto por um número real.* Se $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0$ tem-se, sendo ρ um número real qualquer (escalar constante), $\lim\limits_{u \to u_0} [\rho \,.\, \mathbf{r}(u)] = \rho \,.\, \mathbf{r}_0$.

Demonstração análoga à da prop. 1.ª, a partir da igualdade $\rho \,.\, \mathbf{r}(u) - \rho \,.\, \mathbf{r}_0 = \rho \,.\, [\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0]$.

2.ª *a*) — *Se o vector* $\mathbf{r}(u)$ *é função contínua de u no ponto* u_0, *o produto* $\rho \,.\, \mathbf{r}(u)$, *onde* ρ *é um número real, é função contínua de u no ponto* u_0.

2.ª *b*) — *Se o vector* $\mathbf{r}(u)$ *é função contínua de u sôbre um certo arco de curva* (C), *sôbre o mesmo arco de curva é função contínua o produto* $\rho \,.\, \mathbf{r}(u)$.

Demonstrações análogas às de 1.ª *a*) e 1.ª *b*).

3.ª — *Combinação linear.* Se $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{r}_i(u) = \mathbf{r}_i^0$ é, sendo ρ_i números reais, $\lim\limits_{u \to u_0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i \,.\, \mathbf{r}_i(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i \,.\, \mathbf{r}_i^0$, igualdade que, escrita sob a forma $\lim\limits_{u \to u_0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i . \mathbf{r}_i(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i . \lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{r}_i(u)$, mostra que o sinal de lim. é permutável com o de combinação linear.

Esta propriedade é conseqüência imediata das propriedades 1.ª e 2.ª.

Resultam daqui propriedades 3.ª *a*) e 3.ª *b*) sôbre continuïdade num ponto e num arco de curva.

Operador L. A partir do conceito de limite é definível, do modo seguinte, o operador L — é o operador que, aplicado ao vector $\mathbf{r}(u)$, o faz passar ao limite quando u tende para u_0, isto é, é o operador definido pela igualdade

8) $$L[\mathbf{r}(u)] = \lim_{u \to u_0} \mathbf{r}(u).$$

As propriedades 1.ª e 2.ª, generalizadas na 3.ª, estabelecem que

4.ª — *O operador L é linear* [**1**, 18, 130)].

O conceito de limite aplicado às operações da multiplicação interna e externa dá origem à propriedade

5.ª — *Se* $\lim_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0$ *e* $\lim_{u \to u_0} \mathbf{s}(u) = \mathbf{s}_0$, *tem-se*

$$\lim_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) | \mathbf{s}(u) = \mathbf{r}_0 | \mathbf{s}_0, \quad \lim_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) \wedge \mathbf{s}(u) = \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{s}_0.$$

A demonstração da primeira igualdade apoia-se na relação $\mathbf{r}(u) | \mathbf{s}(u) - \mathbf{r}_0 | \mathbf{s}_0 = [\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0] | \mathbf{s}(u) + [\mathbf{s}(u) - \mathbf{s}_0] | \mathbf{r}_0$ e notando que o segundo membro, pelas propriedades 4.ª e 1.ª do parágrafo **2**, é infinitésimo com $u - u_0$.

Anàlogamente para o produto vectorial tem-se

$$\mathbf{r}(u) \wedge \mathbf{s}(u) - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{s}_0 = [\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0] \wedge \mathbf{s}(u) + \mathbf{r}_0 \wedge [\mathbf{s}(u) - \mathbf{s}_0].$$

Deduzem-se propriedades 5.ª *a*) e 5.ª *b*) para a continuïdade num ponto e num arco de curva.

Passando à decomposição cartesiana, tem-se a propriedade

6.ª — *É condição necessária e suficiente para que o vector* $\mathbf{r}(u) = \sum_k \varphi_k(u) \, . \, \mathbf{i}_k$ *tenha por limite o vector fixo* $\mathbf{r}_0 = \sum_k l_k \, . \, \mathbf{i}_k$ *quando u tende para* u_0, *que seja* $\lim_{u \to u_0} \varphi_k(u) = l_k$, $k = 1, 2, 3$.

É conseqüência da igualdade $\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}_0 = \sum_k [\varphi_k(u) - l_k] \, . \, \mathbf{i}_k$ e da prop. 5.ª do parágrafo **2**.

Esta propriedade pode traduzir-se analìticamente escrevendo

9) $$\lim_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \sum_k \lim \varphi_k(u) \, . \, \mathbf{i}_k.$$

Resultam daqui, como anteriormente,

6.ª *a*) e *b*) — *É condição necessária e suficiente para que* *o vector* $\mathbf{r}(u) = \sum\limits_{k} \varphi_k(u) \, . \, \mathbf{i}_k$ *seja função contínua de u no ponto* u_0*, ou sôbre um arco de curva, que as funções coordenadas* $\varphi_k(u)$ *o sejam.*

Se não se trata dum $\mathbf{r}(u)$, mas de um $\mathbf{r}(u, v)$ ou um $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$, as definições e propriedades mantêm-se, pelo que foi dito no final do parágrafo **2**. O enunciado da definição 3.ª e das propriedades *b)* modifica-se então, havendo que substituir a expressão *arco de curva* por *porção de superfície* ou *região do espaço.*

II. DERIVAÇÃO ORDINÁRIA

4. — **Derivada dum vector $\mathbf{r}(u)$. Definições.** 1.ª — Seja o vector $\mathbf{r}(u)$, função contínua de u no ponto u_0, isto é, tal que [3, 7)] $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_0)$.

Se, quando $\Delta u = u - u_0$ tende para zero de qualquer maneira, o limite da razão dos infinitésimos $\Delta \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)$ (numerador) e $\Delta u = u - u_0$ existe e é finito e não depende do modo como Δu tende para zero, a êsse limite chama-se *derivada* de $\mathbf{r}(u)$ no ponto u_0 e escreve-se

$$10) \qquad \lim_{u \to u_0} \frac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0} = \left[\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}\right]_0.$$

É claro que êste limite é um vector, visto que o numerador do 1.º membro é um vector e o denominador um escalar.

2.ª — Se a igualdade 10) se verifica para todos os valores u_0 correspondentes aos pontos dum arco de curva (C), sôbre êsse arco de curva é definido um novo vector, função de u [que se obtém fazendo correspoder a cada u o segundo membro de 10) respectivo], que se chama *vector derivado* de $\mathbf{r}(u)$ ao longo de (C), e que se representa pela notação $\dfrac{d\mathbf{r}(u)}{du}$.

3.ª — A partir da def. 2.ª, define-se o *operador* $\dfrac{d}{du}$ do modo seguinte — é aquele operador que aplicado ao vector $\mathbf{r}(u)$ o transforma no seu derivado; é portanto definido pela igualdade

$$11)\qquad \frac{d}{du}[\mathbf{r}(u)] = \frac{d\mathbf{r}(u)}{du}$$

e está relacionado com o operador L [3] por

$$12)\qquad \frac{d}{du}\mathbf{r}(u) = \mathrm{L}\frac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0}.$$

Propriedades. As propriedades que seguem são tôdas estabelecidas na ordem das definições 1.ª e 2.ª, primeiro num ponto depois sôbre um arco de curva, sem que ao caso se faça mais nenhuma referência.

1.ª — *Soma. A derivada duma soma de vectores (número finito) é igual à soma das derivadas dêsses vectores.*

Efectivamente,

$$\frac{d}{du}[\mathbf{r}(u) + \mathbf{s}(u)] = \mathrm{L}\frac{\mathbf{r}(u) + \mathbf{s}(u) - [\mathbf{r}(u_0) + \mathbf{s}(u_0)]}{u - u_0}$$

$$= \mathrm{L}\left[\frac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0} + \frac{\mathbf{s}(u) - \mathbf{s}(u_0)}{u - u_0}\right]$$

$$= \mathrm{L}\frac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0} + \mathrm{L}\frac{\mathbf{s}(u) - \mathbf{s}(u_0)}{u - u_0}$$

[3, 4.ª)].

A extensão a mais de duas parcelas é imediata.

2.ª — *Produto por um escalar constante.* Se $\mathbf{r}(u)$ tem derivada e ρ é um escalar constante em relação a u, tem-se

$$13)\qquad \frac{d}{du}[\rho . \mathbf{r}(u)] = \rho \cdot \frac{d}{du}\mathbf{r}(u).$$

Demonstração análoga à anterior.

3.ª — *A derivada duma combinação linear, de coeficientes escalares constantes, de vectores, é a mesma combinação linear das derivadas dêsses vectores :*

$$14)\qquad \frac{d}{du}\sum_i \rho_i . \mathbf{r}_i(u) = \sum_i \rho_i \cdot \frac{d}{du}\mathbf{r}_i(u).$$

É conseqüência imediata das duas propriedades anteriores.

Daqui se conclue que, para $\rho_i = const.$, o operador $\frac{d}{du}$ é *linear*. Não o é, porém, em geral; é o que resulta da propriedade seguinte:

4.ª — *Produto por um escalar função de u. Se* $\mathbf{r}$ *e* ρ *são um vector e um escalar funções de u, tem-se*

$$15) \quad \frac{d}{du}[\rho(u) \,.\, \mathbf{r}(u)] = \rho(u) \cdot \frac{d}{du}\mathbf{r}(u) + \mathbf{r}(u) \cdot \frac{d}{du}\rho(u)$$

que generaliza 13).

Com efeito, tem-se, fazendo $\mathbf{s}(u) = \rho(u) \,.\, \mathbf{r}(u)$,

$$\mathbf{s}(u) - \mathbf{s}(u_0) = \rho(u) \,.\, \mathbf{r}(u) - \rho(u_0) \,.\, \mathbf{r}(u_0) = [\rho(u) - \rho(u_0)] \,.\, \mathbf{r}(u) + \\ + [\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)] \,.\, \rho(u_0)$$

donde a demonstração segue imediatamente (ponto, arco).

A igualdade 15) é generalizada, em virtude da prop. 1.ª, por

$$16) \quad \frac{d}{du}\sum_i \rho_i(u) \,.\, \mathbf{r}_i(u) = \\ = \sum_i [\rho_i(u) \cdot \frac{d}{du}\mathbf{r}_i(u) + \mathbf{r}_i(u) \cdot \frac{d}{du}\rho_i(u)]$$

que generalisa também 14).

5.ª — *Produto escalar. Se os vectores* $\mathbf{r}(u)$ e $\mathbf{s}(u)$ *têm ambos derivada é*

$$17) \quad \frac{d}{du}[\mathbf{r}(u) \,|\, \mathbf{s}(u)] = \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \,\Big|\, \mathbf{s}(u) + \mathbf{r}(u) \,\Big|\, \frac{d\mathbf{s}(u)}{du}.$$

É conseqüência imediata de 12) e da identidade que serviu para demonstrar a propriedade do produto interno contida em **3**, 5.ª.

6.ª — *Produto vectorial. Se os vectores* $\mathbf{r}(u)$ *e* $\mathbf{s}(u)$ *têm ambos derivada é*

$$18) \quad \frac{d}{du}[\mathbf{r}(u) \wedge \mathbf{s}(u)] = \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \wedge \mathbf{s}(u) + \mathbf{r}(u) \wedge \frac{d\mathbf{s}(u)}{du}.$$

Demonstração análoga. É indispensável aqui não alterar, em nenhuma parcela, a ordem dos factores.

7.ª — *Produto mixto*. Sejam $\mathbf{r}_1(u)$, $\mathbf{r}_2(u)$, $\mathbf{r}_3(u)$ três vectores funções de u e seja $m = \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3$; calculemos a derivada de m. Tem-se, pelas regras anteriores, 17) e 18)

$\frac{dm}{du} = \frac{d\mathbf{r}_1}{du} \Big| \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \Big| \frac{d}{du}(\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3)$ e como

$\frac{d}{du}(\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3) = \frac{d\mathbf{r}_2}{du} \wedge \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \wedge \frac{d\mathbf{r}_3}{du}$ vem, substituindo e aplicando a propriedade distributiva do produto escalar [**1**, **13**, 90)],

$$19) \quad \frac{dm}{du} = \frac{d\mathbf{r}_1}{du} \Big| \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \Big| \frac{d\mathbf{r}_2}{du} \wedge \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \Big| \mathbf{r}_2 \wedge \frac{d\mathbf{r}_3}{du}.$$

8.ª — *Duplo produto vectorial*. Operando duma maneira inteiramente análoga, obtém-se

$$20) \quad \frac{d}{du}\Big[\mathbf{r}_1 \wedge (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3)\Big] = \frac{d\mathbf{r}_1}{du} \wedge (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3) + \\ + \mathbf{r}_1 \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{du} \wedge \mathbf{r}_3\right) + \mathbf{r}_1 \wedge \left(\mathbf{r}_2 \wedge \frac{d\mathbf{r}_3}{du}\right).$$

Como se vê, as regras operatórias 17) a 20) são análogas às da Análise Infinitesimal.

Passando à decomposição cartesiana, tem-se a propriedade

9.ª — *É condição necessária e suficiente para que o vector* $\mathbf{r}(u) = \sum_k \varphi_k(u) . \mathbf{i}_k$ *tenha derivada, num ponto ou sôbre um arco de curva, que nesse ponto ou nesse arco tenham derivada as funções* $\varphi_k(u)$, *e, se as derivadas existem, é*

$$21) \quad \frac{d}{du}\mathbf{r}(u) = \sum_k \frac{d\varphi_k(u)}{du} \cdot \mathbf{i}_k .$$

É conseqüência da prop. 6.ª do parágrafo **3** aplicada à igualdade

$$\frac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0} = \sum_k \frac{\varphi_k(u) - \varphi_k(u_0)}{u - u_0} \cdot \mathbf{i}_k .$$

10.ª — *Se o vector* $\mathbf{r}(u)=\mathbf{a}$ *é constante, o seu derivado é nulo e recìprocamente.*

Se $\mathbf{r}(u)=\mathbf{a}$ constante, é $\mathbf{r}(u)-\mathbf{r}(u_0)=0$, logo [10)] $\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}=0$.

Recìprocamente, se $\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}=0$ é $\frac{d\varphi_k(u)}{du}=0$ donde $\varphi_k(u)=const.$ e $\mathbf{r}(u)=\mathbf{a}$ é constante.

11.ª — *Se* $\mathbf{r}(u)$ *tem módulo constante (não nulo), o seu derivado ou é nulo ou lhe é perpendicular, e recìprocamente.*

Comecemos por calcular a derivada do módulo de $\mathbf{r}(u)$. Da igualdade $[mod\,\mathbf{r}(u)]^2=\mathbf{r}(u)\,|\,\mathbf{r}(u)$ resulta, derivando ambos os membros em relação a u, $2\,mod\,\mathbf{r}(u)\cdot\frac{d}{du}\,mod\,\mathbf{r}(u)=$ $=2\mathbf{r}(u)\,\Big|\,\frac{d}{du}\mathbf{r}(u)$ donde

$$22)\qquad \frac{d}{du}\,mod\,\mathbf{r}(u)=\frac{1}{mod\,\mathbf{r}(u)}\cdot\mathbf{r}(u)\,\Big|\,\frac{d}{du}\mathbf{r}(u).$$

Logo, se $mod\,\mathbf{r}(u)=const.$ não nulo, o segundo membro é nulo, o que só pode dar-se se $\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}$ fôr nulo ou perpendicular a $\mathbf{r}(u)$. Recìprocamente, se algum dêstes casos se dá, o primeiro membro é nulo, logo $mod\,\mathbf{r}(u)=const.$

12.ª — *Se o vector* $\mathbf{r}(u)$, *não nulo, é paralelo a uma recta fixa, o seu vector derivado é-lhe paralelo e recìprocamente.*

Seja $\mathbf{t}$ o vector unitário de $\mathbf{r}(u)$, isto é, seja $\mathbf{r}(u)=\rho(u).\mathbf{t}$ com $\rho(u)=mod\,\mathbf{r}(u)$; $\mathbf{t}$ é, pela hipótese, constante. Tem-se, derivando, $\frac{d}{du}\mathbf{r}(u)=\frac{d\rho(u)}{du}\cdot\mathbf{t}=\frac{d\rho(u)}{du}\cdot\frac{1}{\rho(u)}\cdot\mathbf{r}(u)$

logo $\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}$ é paralelo a $\mathbf{r}(u)$ [**1**, *7*, 39)].

Recìprocamente, se $\dfrac{d\mathbf{r}(u)}{du}$ é paralelo a $\mathbf{r}(u)$ tem-se [1, 12, 82)] $\mathbf{r}\wedge\dfrac{d\mathbf{r}}{du}=0$ e, como $\dfrac{d\mathbf{r}}{du}=\dfrac{d\rho}{du}\cdot\mathbf{t}+\rho\cdot\dfrac{d\mathbf{t}}{du}$, vem $\rho.\mathbf{t}\wedge\left(\dfrac{d\rho}{du}\cdot\mathbf{t}+\rho\cdot\dfrac{d\mathbf{t}}{du}\right)=0$ donde $\rho\cdot\dfrac{d\rho}{du}\cdot\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}+$ $+\rho^2.\mathbf{t}\wedge\dfrac{d\mathbf{t}}{du}=0$ donde, ainda, por ser $\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}=0$, $\mathbf{t}\wedge\dfrac{d\mathbf{t}}{du}=0$. Mas $\mathbf{t}$ é um vector unitário, logo $mod\,\mathbf{t}=const.$ e pela propriedade anterior é $\mathbf{t}\left|\dfrac{d\mathbf{t}}{du}=0\right.$; portanto a condição $\mathbf{t}\wedge\dfrac{d\mathbf{t}}{du}=0$ exige que seja $\dfrac{d\mathbf{t}}{du}=0$, logo $\mathbf{t}$ é constante (prop. 10.ª) e $\mathbf{r}(u)$ tem, por conseqüência, direcção fixa.

Derivada dum ponto. — O conceito de derivada estende-se a um ponto função dum parâmetro escalar u. Seja $\mathrm{P}(u)$ um tal ponto; se existir $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\mathrm{P}(u_0+\Delta u)-\mathrm{P}(u_0)}{\Delta u}$, qualquer que seja o modo como Δu tende para zero, a êsse limite chama-se derivada do ponto $\mathrm{P}(u)$ correspondente ao valor u_0 do parâmetro. É claro que êsse limite, quando existir, é um vector e é fácil ver que êsse vector coïncide com o vector derivado de $\mathbf{r}(u)=\mathrm{P}(u)-\mathrm{O}$, qualquer que seja o ponto *fixo* O do espaço. Efectivamente (fig. 40) se O é fixo (coordenadas constantes em relação a u) tem-se

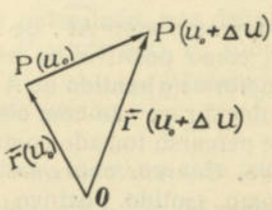


Fig. 40

$$\mathrm{P}(u_0+\Delta u)-\mathrm{P}(u_0)=\mathbf{r}(u_0+\Delta u)-\mathbf{r}(u_0).$$

Com esta propriedade, fica reduzido o estudo do derivado dum ponto ao de um vector.

5. — **Tangente a uma curva torsa.** Seja uma curva (C), torsa em geral, odógrafa do vector $\mathbf{r}(u)$ [1], e suponhamos que êste vector é, em todos os pontos de (C), função contínua e admitindo vector derivado *não nulo*. Como a continuïdade e a existência de derivada de $\mathbf{r}(u)$ correspondem à continuïdade e à existência de derivada das três funções coordenadas $\varphi_k(u)$ $k = 1, 2, 3$ [3, 6.ª *a*) e *b*), 4, 9.ª] que figuram nas três equações paramétricas da curva, $x_k = \varphi_k(u)$ $k = 1, 2, 3$, a hipótese feita sôbre $\mathbf{r}(u)$ é a de que a curva (C) é contínua e de que em todos os seus pontos existem derivadas $\dfrac{dx_k}{du}$ $k = 1, 2, 3$, não tôdas nulas — os pontos de (C) dizem-se, então, *regulares*; limitaremos o estudo ao caso em que todos os pontos de (C) são regulares.

Posto isto, consideremos um ponto A arbitrário (fig. 41) da curva e, a partir dele, os dois sentidos opostos de percurso sôbre a curva, um dos quais será tomado como positivo e o outro como negativo.

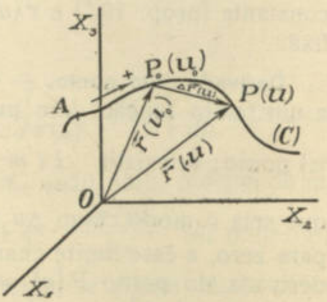


Fig. 41

Se tomarmos o ponto A como origem da contagem de arcos sôbre a curva, consideraremos o arco $\overset{\frown}{AP}$, de A para P, como positivo ou negativo conforme o sentido de A para P coïncidir ou não com o sentido de percurso tomado como positivo. *Convencionaremos* tomar como sentido positivo de percurso aquele que corresponde ao *crescimento* do parâmetro escalar u. Fica assim definido, não só o *sinal* do *arco s* ou *abscissa curvilínea* do ponto P, medida a partir de A sôbre a curva (da definição precisa e do cálculo de s será tratado no parágrafo seguinte), mas definido, do mesmo passo, o sentido de crescimento do arco.

Seja, agora, P_0 um ponto da curva, correspondente ao valor u_0 do parâmetro, e P um ponto vizinho, correspondente ao valor u. A êsses dois pontos correspondem, respectivamente, os vectores $\mathbf{r}(u_0)$ e $\mathbf{r}(u)$ e a figura mostra que o vector

$\Delta\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0) = \overrightarrow{P_0P}$ está dirigido segundo a recta que passa por P_0 e P. Dividamos êste vector pelo escalar

$\Delta u = u - u_0$; o vector $\dfrac{\Delta\mathbf{r}(u)}{\Delta u}$ continua sôbre a mesma

recta e ***dirigido*** sempre, em virtude da convenção de sinal acima feita, ***no sentido em que o arco cresce*** [no caso da fig. 41, é $u > u_0$ e a divisão por $u - u_0$ não altera o sentido de

$\Delta\mathbf{r}(u) = \overrightarrow{P_0P}$; se P estivesse à esquerda de P_0 era $u < u_0$ e a divisão por $u - u_0$ mudava o sentido de $\Delta\mathbf{r}(u)$].

Façamos tender o ponto P para P_0 sôbre a curva, isto é,

façamos tender $\Delta u = u - u_0$ para zero; $\overrightarrow{P_0P}$ é, então,

um vector infinitésimo. Por hipótese, existe $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0} =$

$= \left[\dfrac{d\mathbf{r}(u)}{du}\right]_{u_0}$ vector que, pelo que acaba de ver-se, é dirigido

no sentido em que o arco cresce. Por outro lado, por definição de tangente a uma curva, quando P tende para P_0 sôbre

a curva, a recta P_0P, linha de acção do vector $\dfrac{\mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)}{u - u_0}$,

tende para a tangente em P_0, se existir, logo, no caso presente, a tangente em P_0 existe e é a linha de acção do vector

$\left[\dfrac{d\mathbf{r}(u)}{du}\right]_{u_0}$.

Da análise feita, conclue-se que a existência de derivada não nula do vector $\mathbf{r}(u)$ corresponde à existência de tangente da sua odógrafa e essa tangente tem por parâmetros directores, em relação a um sistema cartesiano rectangular

Ox_1, x_2, x_3, as derivadas $\left[\frac{dx_1}{du}\right]_{u_0}, \left[\frac{dx_2}{du}\right]_{u_0}, \left[\frac{dx_3}{du}\right]_{u_0}$,

visto que $\left[\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}\right]_{u_0} = \sum_k \left[\frac{dx_k}{du}\right]_{u_0} \cdot \mathbf{i}_k$ [4, 21)].

As equações cartesianas da tangente à curva (C) no ponto P_0 são então [1, 10, 58)]

$$23) \qquad \frac{X_1 - x_1}{\frac{dx_1}{du}} = \frac{X_2 - x_2}{\frac{dx_2}{du}} = \frac{X_3 - x_3}{\frac{dx_3}{du}}$$

onde X_1, X_2, X_3, são as coordenadas correntes da tangente e, tanto x_1, x_2, x_3 como $\frac{dx_1}{du}, \ldots$, são tomadas no ponto $P_0(u_0)$.

A equação vectorial da tangente é

$$24) \qquad \overrightarrow{P_0P} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0.$$

O vector $d\mathbf{r}(u)$. Efectuemos o produto do vector derivado $\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}$ pelo escalar infinitésimo du; o vector infinitésimo obtido, que representaremos por $d\mathbf{r}(u) \rightarrow d\mathbf{r}(u) = \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \cdot du$, tem a direcção de $\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}$ e *existe*, portanto, *sôbre a tangente à odógrafa no ponto correspondente ao valor do parâmetro.*

A êste vector chama-se *diferencial* do vector $\mathbf{r}(u)$. A sua decomposição cartesiana é, como resulta da definição,

$$25) \qquad d\mathbf{r}(u) = \sum_k dx_k(u) \,.\, \mathbf{i}_k \,.$$

Daqui resulta que ao vector $d\mathbf{r}(u)$ se podem aplicar as propriedades formais das diferenciais ordinárias e que, portanto, vale para êle um conjunto de regras formais análogas àquelas que atraz deduzimos para o vector $\frac{d\mathbf{r}}{du}$.

O vector $d\mathbf{r}(u)$ relaciona-se simplesmente com o vector infinitésimo $\Delta\,\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u) - \mathbf{r}(u_0)$. Efectivamente, $\Delta\,\mathbf{r}(u) = \sum_k [\varphi_k(u) - \varphi_k(u_0)]\,.\,\mathbf{i}_k = \sum_k \Delta\varphi_k(u)\,.\,\mathbf{i}_k$; ora, como se sabe do cálculo diferencial, é $\Delta\varphi_k(u) = d\varphi_k(u) + \theta_k$, sendo θ_k um infinitésimo de ordem maior que 1 com $\Delta u = u - u_0$. É portanto $\Delta\,\mathbf{r}(u) = \sum_k d\varphi_k(u)\,.\,\mathbf{i}_k + \sum_k \theta_k\,.\,\mathbf{i}_k =$ $= d\mathbf{r}(u) + \boldsymbol{\delta}$, isto é, $\Delta\,\mathbf{r}(u)$ *difere de* $d\mathbf{r}(u)$ *por um vector cujas coordenadas são infinitésimos de ordem maior que 1 com* Δu.

Por analogia com o que se passa na Análise Infinitesimal, a $d\mathbf{r}(u)$ chama-se, ainda, *parte principal* de $\Delta\,\mathbf{r}(u)$.

6. — **Comprimento de arco duma curva.** Seja uma curva (C), fig. 42, odógrafa dum vector $\mathbf{r}(u)$ e suponhamos que, em cada ponto compreendido entre dois pontos dados $A(u_0)$ e $B(u_1)$ da curva, $\mathbf{r}$ é função contínua de u (a curva é contínua) e admite um derivado único não nulo (a curva tem uma tangente única em cada ponto) também função contínua de u. Suponhamos, ainda, escolhido, sôbre a curva, um sentido crescente do arco, entidade geométrica intuitiva. Vamos calcular o comprimento de arco entre A e B, que representaremos por s; para isso tem que começar-se por definir o que se entende por tal comprimento de arco.

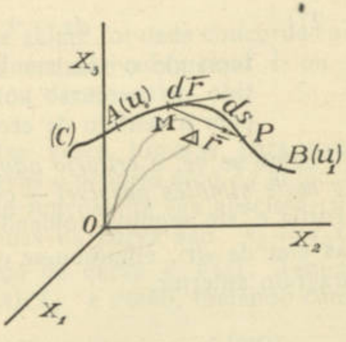


Fig. 42

Definição 1.ª — Divida-se o arco geométrico $\widehat{AB}$ em arcos parciais $\widehat{MP}$ e seja s_i o comprimento de cada um dêles; faça-se Σs_i e calcule-se o seu limite quando cada um dos arcos parciais tende para zero e o seu número para infinito. É o valor dêsse limite, quando existir e fôr finito, que se toma para definição de s [1].

Como se vê, a questão transportou-se do arco finito $\widehat{AB}$ para o arco *elementar,* infinitésimo $\widehat{MP}$, de que representaremos o comprimento infinitésimo por $ds = s_i$; tudo está agora em definir o que se entende pelo comprimento ds. A essa definição preside o seguinte *critério de métrica* das curvas:

Definição 2.ª — Chama-se comprimento do arco elementar da curva torsa (C) ao número real ds definido pela igualdade

26) $$ds^2 = d\mathbf{r} \,|\, d\mathbf{r}$$

ou seja, visto que $d\mathbf{r} \,|\, d\mathbf{r} = (mod\, d\mathbf{r})^2$,

27) $$ds = \pm\, mod\, d\mathbf{r}$$

tomando o sinal $+$ ou o sinal $-$ conforme o sentido do percurso sôbre a curva coïncidir ou não com o sentido de crescimento do parâmetro u.

Como se vê, *o critério adoptado para a métrica da curva é o mais simples possivel* — começou por se assimilar o arco à corda e, em seguida, tomando o módulo, não do vector $\Delta \mathbf{r}$ mas sim de $d\mathbf{r}$, eliminou-se o vector $\boldsymbol{\delta}$ referido no final do parágrafo anterior.

---

(1) Quando s existe e é função contínua de u, a curva diz-se *rectificável;* isso dá-se em condições menos restritivas que aquelas supostas acima para $\mathbf{r}(u)$ — é necessário e suficiente que as $\varphi_k(u)$ sejam contínuas e de variação limitada; na nossa hipótese, como adiante se verá, o arco s, além de função contínua de u, tem derivada (Vide Jordan, *Cours d'Analyse,* Tomo 1.º, 3.ª ed., pg. 107).

Da definição resulta agora, em virtude de 5, 25),

28) $$ds^2 = \sum_k [dx_k(u)]^2 = \sum_k [x'_k(u)]^2 \,.\, du^2 \,.$$

Pela definição 1.ª é, então, se o limite existir, $s = lim \sum ds = \pm\, lim \sum \sqrt{\sum_k [x'_k(u)]^2} \,.\, du$; na hipótese feita, da continuïdade das derivadas, êste limite existe e é

29) $$s = \pm \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{du}\right)^2} \cdot du$$

devendo tomar-se o sinal + ou o sinal — conforme acima foi dito.

Se o ponto A é fixo e B variável, s é então função de u e da análise feita resulta que essa função tem derivada em relação a u, dada por [28)]

30) $$\frac{ds}{du} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{du}\right)^2} \,.$$

A interpretação de sinal que acima foi dada concorda com a interpretação geral do sinal duma derivada: sinal + ou — conforme a função é crescente ou decrescente.

Caso em que $u = s$. Muitas vezes toma-se para parâmetro de representação das curvas o próprio arco s; então as coordenadas de cada ponto são funções da sua abscissa curvilínea s; as equações cartesianas da curva são $x_k = x_k(s)$ $k = 1, 2, 3$, e o vector-espaço da curva é $\mathbf{r}(s)$. Tem-se, então [5,25)] $d\mathbf{r}(s) = \sum_k dx_k(s) \,.\, \mathbf{i}_k$ e como, tomando como sentido de percurso o do crescimento do arco, é [27)] $ds = mod\, d\mathbf{r}(s)$, tem-se que *o vector*

31) $$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \sum_k \frac{dx_k(s)}{ds} \cdot \mathbf{i}_k$$

é unitário.

Daqui resulta [1, 9, 52)] que $\dfrac{dx_k(s)}{ds}$ $k=1, 2, 3$, são os *cosenos directores* da tangente à odógrafa de $\mathbf{r}(s)$ e que, como conseqüência,

32) $$\sum_k \left[\frac{dx_k(s)}{ds}\right]^2 = 1.$$

Esta igualdade e 29) dão o resultado evidente $s=\int_{u_0}^{u_1} ds$.

7. — **Derivadas de ordem superior.** Duma maneira semelhante à usada na Análise Infinitesimal, definem-se derivadas de ordem superior dum vector. Dado $\mathbf{r}(u)$, se $\dfrac{d\mathbf{r}}{du}$ admite vector derivado, chama-se-lhe *derivado de 2.ª ordem* de $\mathbf{r}(u)$ e representa-se por $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{du^2}$; do mesmo modo se define derivado de ordem $3, \ldots n$:

33) $$\frac{d^n\mathbf{r}}{du^n} = \frac{d}{du}\left(\frac{d^{n-1}\mathbf{r}}{du^{n-1}}\right).$$

Destas definições e das propriedades estabelecidas no parágrafo 4 resulta que, se é $\mathbf{r}(u) = \sum_k x_k(u)\,.\,\mathbf{i}_k$ a decomposição cartesiana de $\mathbf{r}(u)$, se tem

34) $$\frac{d^n\mathbf{r}}{du^n} = \sum_k \frac{d^n x_k(u)}{du^n}\,.\,\mathbf{i}_k.$$

Muitos dos conceitos e das propriedades formais da Análise Infinitesimal, além dos já estabelecidos, se estendem sem alteração à Análise Vectorial; por exemplo, o conceito e regra de derivação da *função de função*. Se $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u)$ e $u=\varphi(v)$, $\mathbf{r}$ diz-se função de função de v, nas mesmas condições que na Análise ordinária, e verifica-se a propriedade da *continuïdade* — se $\mathbf{r}(u)$ é função contínua de u e u função contínua de v, $\mathbf{r}(v)$ é função contínua de v. A *derivada* de $\mathbf{r}$ em ordem a v existe e calcula-se também por uma regra análoga — se $\mathbf{r}(u)$ tem derivada no ponto u_0 e $u=\varphi(v)$ tem derivada não nula no ponto v_0 tal que $u_0=\varphi(v_0)$, o vector $\mathbf{r}(v)$ tem derivada no ponto v_0, a qual tem por expressão

$$\left[\frac{d\mathbf{r}(v)}{dv}\right]_{v_0} = \left[\frac{d\mathbf{r}(u)}{du}\right]_{u_0} \cdot \left[\frac{du}{dv}\right]_{v_0}.$$

Esta igualdade fundamenta-se em que $\dfrac{\mathbf{r}(v)-\mathbf{r}(v_0)}{v-v_0} = \dfrac{\mathbf{r}(u)-\mathbf{r}(u_0)}{v-v_0} = \dfrac{\mathbf{r}(u)-\mathbf{r}(u_0)}{u-u_0} \cdot \dfrac{u-u_0}{v-v_0}$ e no facto de, na hipótese feita, as passagens ao limite para $\Delta u = 0$ e para $\Delta v = 0$ serem equivalentes. Quando a derivada existe num certo domínio, nele é definido o vector derivado $\dfrac{d\mathbf{r}(v)}{dv}$, dado pela igualdade

$$35)\qquad \frac{d\mathbf{r}}{dv} = \frac{d\mathbf{r}}{du} \cdot \frac{du}{dv}.$$

Exemplo. Seja a curva (C), odógrafa do vector $\mathbf{r}(u)$; se se toma para parâmetro o arco s, o vector derivado $\dfrac{d\mathbf{r}}{du}$ está ligado com o vector unitário da tangente $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}$ [6, 31)] pela relação

$$36)\qquad \frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{t} \cdot \frac{ds}{du}$$

donde se conclue imediatamente que [6, 30)]

$$37)\qquad \frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{\dfrac{ds}{du}} \cdot \frac{dx_k}{du} = \frac{\dfrac{dx_k}{du}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dx_2}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dx_3}{du}\right)^2}}.$$

Para as *derivadas de ordem superior* tem-se, como na Análise Infinitesimal

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dv^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{du} \cdot \frac{d^2u}{dv^2}.$$

. . .

Definições e expressões estendem-se ao caso em que se trata dum $P(u)$.

Fórmula de Taylor. Também a fórmula de Taylor se estende aqui sem dificuldade, se bem que não exactamente com a mesma forma.

Seja $\mathbf{r}(u) = \sum_k x_k(u) . \mathbf{i}_k$ e suponhamos que as coordenadas $x_k(u)$ se podem desenvolver segundo a fórmula de Taylor

$$x_k(u) = x_k(u_0) + (u - u_0) . x'_k(u_0) + \cdots + \\ + \frac{(u-u_0)^n}{n!} \cdot [x_k^{(n)}(u_0) + \varepsilon_k]$$

sendo ε_k um infinitésimo com $u - u_0$. Multiplicando ambos os membros por $\mathbf{i}_k$ e somando em k, vem

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_0) + (u - u_0) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_{u_0} + \cdots + \\ + \frac{(u-u_0)^n}{n!} \cdot \left[\left(\frac{d^n\mathbf{r}}{du^n}\right)_{u_0} + \boldsymbol{\delta}(u)\right]$$

onde $\boldsymbol{\delta}(u) = \sum_k \varepsilon_k . \mathbf{i}_k$ é um vector infinitésimo com $u - u_0$.

Fazendo $u - u_0 = h$, vem

$$\text{38)} \qquad \mathbf{r}(u_0 + h) = \mathbf{r}(u_0) + h \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_{u_0} + \cdots + \\ + \frac{h^n}{n!} \cdot \left(\frac{d^n\mathbf{r}}{du^n}\right)_{u_0} + \frac{h^n}{n!} \cdot \boldsymbol{\delta}(u)$$

que é o desenvolvimento de Taylor para um vector $\mathbf{r}(u)$.

Como se vê, êle difere do da Análise ordinária no seu último termo; se bem que se tenha, utilizando o resto de Lagrange, $x_k(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^i}{i!} \cdot x_k^{(i)}(u_0) + \frac{h^n}{n!} \cdot x_k^{(n)}(u_0 + \theta_k h)$, no último termo do desenvolvimento do vector não pode escrever-se $\frac{h^n}{n!} \cdot \frac{d^n \mathbf{r}(u_0 + \theta h)}{du^n}$ visto que θ_k varia com k, isto é, com as coordenadas do vector.

Se as coordenadas de $\mathbf{r}(u)$ forem desenvolvíveis em série de Taylor numa vizinhança de u_0, tem-se então, para o vector,

$$39)\qquad \mathbf{r}(u_0 + h) = \mathbf{r}(u_0) + h \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_{u_0} + \cdots + \\ + \frac{h^n}{n!} \cdot \left(\frac{d^n \mathbf{r}}{du^n}\right)_{u_0} + \cdots .$$

O segundo membro desta igualdade é uma série em cujos termos figuram vectores e é claro que só pode ser-lhe ligada uma ideia precisa desde que se defina convergência duma série. Essa definição dá-se do modo seguinte: formada a soma $\mathbf{s}_n$ dos n primeiros termos da série (soma que é um vector) a série diz-se *convergente* quando $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{s}_n$ fôr um vector finito $\mathbf{s}$, vector que se diz, então, *soma* da série.

Desta definição e das propriedades da teoria dos limites de vectores [3] resulta imediatamente que *se as três séries desenvolvimentos das funções escalares $x_k(u)$ são convergentes, é convergente o segundo membro de* 39) *e vice-versa.*

Todo o vector $\mathbf{r}(u)$ que, numa vizinhança do valor u_0, é desenvolvível segundo 39) diz-se função analítica de u nessa vizinhança.

Fazem-se considerações análogas para uma função $\mathrm{P}(u)$.

8. — **Derivadas parciais dum vector $\mathbf{r}(u, v)$.** Seja um vector função de dois parâmetros u e v. Exactamente como na Análise Infinitesimal, definem-se *derivadas parciais* em ordem a u e v do vector $\mathbf{r}(u, v)$ no ponto (u_0, v_0) como os limites, se existirem, dos quocientes $\frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$, $\frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}$, que se obtêm fazendo variar de

cada vez apenas um parâmetro, e desde que êsses limites sejam os mesmos quaisquer que sejam as maneiras como respectivamente Δu e Δv tendem para zero. É claro que êsses limites, quando existem, são vectores; se êsses vectores existem em todos os pontos dum certo domínio [a superfície odógrafa de $\mathbf{r}(u, v)$], nesse domínio são definidos (como na def. 2.ª de 4) os dois *vectores*, funções de u e v, *derivadas parciais* de $\mathbf{r}(u, v)$, respectivamente em ordem a u e v, e que representaremos por $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$:

$$40) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u}, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v}. \end{cases}$$

Estes vectores podem, por sua vez, admitir derivadas parciais que, quando existirem, se chamam *derivadas parciais de 2.ª ordem* de $\mathbf{r}(u, v)$ e que se representam pelas notações $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}$; definem-se do mesmo modo derivadas parciais de ordem $3, \cdots n, \cdots$, que são funções, em geral, de u e v; para as representar usa-se o mesmo género de notações.

Estendem-se aqui também muitas das propriedades gerais da Análise Infinitesimal; vejamos algumas que mais importam.

a) **Independência da ordem de derivação.** Demonstra-se que se os vectores $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}$ e $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u}$ são funções contínuas de u e v êles são iguais e, mais geralmente, que duas derivadas parciais, de ordem qualquer, que difiram apenas pela ordem da derivação são iguais se fôrem funções contínuas de u e v.

b) **Cálculo formal.** Verifica-se fàcilmente que as regras operatórias sôbre derivadas se mantêm, assim como as propriedades operatórias estudadas no parágrafo 4 referentes aos operadores vectoriais.

c) **Teorema dos acréscimos finitos.** Seja o vector $\mathbf{r}(u, v)$ e consideremos a diferença $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u + du, v) + \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v)$. Pode escrever-se [5, *o vector* $d\mathbf{r}(u)$], se existem as derivadas parciais,

$$\mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u + du, v) = \frac{\partial\mathbf{r}(u + du, v)}{\partial v} \cdot dv + \boldsymbol{\delta}_1$$

sendo $\boldsymbol{\delta}_1$ um vector cujas coordenadas são infinitésimos de ordem maior que *1* com dv e

$$\mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \cdot du + \boldsymbol{\mu}$$

sendo $\boldsymbol{\mu}$ um vector cujas coordenadas são infinitésimos de ordem maior que *1* com du. É, portanto,

$$\Delta\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial\mathbf{r}(u + du, v)}{\partial v} \cdot dv + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\delta}_1.$$

Se a derivada parcial $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ é contínua, tem-se

$\dfrac{\partial\mathbf{r}(u + du, v)}{\partial v} = \dfrac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial v} + \boldsymbol{\delta}_2$ sendo $\boldsymbol{\delta}_2$ um infinitésimo com du, de modo que

$$\Delta\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \cdot dv + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2 . dv, \text{ou seja}$$

$$41) \qquad \Delta\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \cdot dv + \mathbf{w}$$

onde $\mathbf{w}$ é um vector cujas coordenadas são infinitésimos de ordem maior que *1* com o maior dos infinitésimos (da mesma ordem) du e dv; por outras palavras, supondo que $|dv| > |du|$ e $\lim \dfrac{dv}{du} \neq 0$, é $\lim\limits_{\substack{du \to 0 \\ dv \to 0}} \dfrac{\mathbf{w}}{dv} = 0$.

Tiravam-se conclusões análogas se se tivesse, ao valor de $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u, v)$ somado e subtraído $\mathbf{r}(u, v + dv)$, mas havia então, para deduzir 41), que supôr

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ contínua, de modo que pode dizer-se que 41) é verdadeira na hipótese da continuïdade das duas derivadas parciais.

d) **Fórmula de Taylor.** Generaliza-se sem dificuldade a fórmula de Taylor obtida no parágrafo anterior para os vectores funções de um parâmetro [7, 38)]. Essa fórmula, que generaliza também o teorema dos acréscimos finitos [41)] pode escrever-se

$$42)\quad \mathbf{r}(u_0+h, v_0+k) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + h\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0} + k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0} + \frac{1}{2!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0} + k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0}\right)^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0} + k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0}\right)^{(n)} + \mathbf{w}$$

onde: *a*) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0}$ representam as derivadas parciais tomadas no ponto (u_0, v_0); *b*) as potências simbólicas têm a mesma significação que na Análise Infinitesimal — desenvolvidas pela fórmula do binómio, há que substituir os expoentes que recaem sôbre as derivadas por índices de derivação e os produtos por uma derivada única de ordem igual à soma das ordens; *c*) $\mathbf{w}$ é um vector cujas coordenadas são infinitésimos de ordem maior que n com o maior dos dois infinitésimos (da mesma ordem) h e k.

Estende-se também, quando as coordenadas de $\mathbf{r}(u, v)$ admitem desenvolvimentos em série de Taylor, a fórmula 39) do parágrafo anterior; tem-se

$$43)\quad \mathbf{r}(u_0+h, v_0+k) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \left(h\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0} + k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(h\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_0} + k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v_0}\right)^{(n)} + \cdots.$$

e) **Função composta.** Define-se função composta como na Análise ordinária — se u e v são funções de t, $\mathbf{r}(u, v)$

diz-se função composta de t e estende-se a propriedade referente à continuïdade. A derivada da função composta $\mathbf{r}(t)$ calcula-se a partir de 41) — se $\mathbf{r}(u, v)$ tem derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ contínuas e se u e v têm derivadas não nulas em relação a t, é

$$44) \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

visto que, nessa hipótese, é aplicável 41) e se tem $\lim\limits_{dt \to 0} \frac{\mathbf{w}}{dt} = 0$.

f) **Diferencial total.** Dá-se êste nome ao vector

$$45) \qquad d\mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot dv.$$

A razão do nome é evidente — se r fôsse uma função escalar das duas variáveis u e v, seria dr, dado por 45), a sua diferencial total ordinária. As vantagens do seu uso são as habituais; a fórmula de derivação da função composta resulta dela imediatamente.

É também imediato que $d\mathbf{r}(u, v)$ generaliza $d\mathbf{r}(u)$ [5] e de 41) resulta que êle está relacionado com $\Delta \mathbf{r}(u, v)$ duma maneira análoga àquela que liga $d\mathbf{r}(u)$ com $\Delta \mathbf{r}(u)$.

No parágrafo seguinte será vista a significação geométrica de $d\mathbf{r}(u, v)$.

g) **Decomposição cartesiana.** Se [1, 2)] $\mathbf{r}(u, v) = \sum\limits_k x_k(u, v) . \mathbf{i}_k$ um raciocínio fácil mostra que é

$$46) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial u} \cdot \mathbf{i}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial v} \cdot \mathbf{i}_k$$

verificando-se fórmulas análogas para as derivadas de ordem superior.

Se $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, é $\mathbf{r} = \sum\limits_k x_k(u, v) . \mathbf{i}_k = \sum\limits_k X_k(t) . \mathbf{i}_k$ e $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum\limits_k \frac{dX_k}{dt} \cdot \mathbf{i}_k$. Mas, por 44) e 46) tem-se, igualando os coeficientes de $\mathbf{i}_k$,

$$47) \qquad \frac{dX_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial x_k}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

que é a expressão da derivada do escalar X_k, função composta de t.

Para a diferencial total, tem-se

$$d\mathbf{r} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial u} \cdot \mathbf{i}_k \cdot du + \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial v} \cdot \mathbf{i}_k \cdot dv = \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x_k}{\partial v} \cdot dv \right) \cdot \mathbf{i}_k$$

ou seja

$$48) \qquad d\mathbf{r}(u, v) = \sum_k dx_k(u, v) \,.\, \mathbf{i}_k$$

que generaliza 5, 25).

Dão-se definições e deduzem-se propriedades análogas para uma função $P(u, v)$.

9. — **Plano tangente e normal a uma superfície. Parâmetros de Gauss.** Seja o vector $\mathbf{r}(u, v)$ e a sua odógrafa, isto é [1] a superfície de equação $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$; suporemos que a superfície é contínua e que o vector $\mathbf{r}(u, v)$ admite derivadas parciais finitas e contínuas sôbre tôda a região da superfície que considerarmos.

Os desenvolvimentos que vamos fazer exigem a consideração de dois sistemas particulares de linhas sôbre a superfície. Fixemos um valor, u_0, do parâmetro u e consideremos o conjunto dos pontos da superfície que correspondem a êsse valor fixo u_0; o logar dêssses pontos é, manifestamente, a odógrafa do vector $\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{R}(v)$ e essa odógrafa é uma *curva* traçada sôbre a superfície, curva dada em função do parâmetro variável único v. Tem-se, assim, correspondendo a *cada* valor de que é susceptível o parâmetro u, uma curva; o seu conjunto chama-se o *sistema, ou família, das curvas $u = const.$* Anàlogamente se tem sôbre a superfície o *sistema, ou família, das curvas $v = const.$*, isto é, o sistema das odógrafas de $\mathbf{r}(u, v_i)$, cujo parâmetro é u.

Se admitirmos a *univocidade* (além da continuïdade), estabelecida no parágrafo 1 para a representação vectorial da superfície, isto é, que a cada ponto P corresponde *um* par de valores de u e v e recìprocamente, tem-se que por cada ponto da superfície passa uma única curva de cada sistema (fig. 43) e que duas curvas do mesmo sistema não se cruzam (aliás haveria pares diferentes de valores de u e v correspondendo ao mesmo ponto) a não ser em pontos excepcionais — em particular, se uma das curvas dum sistema se reduz a um ponto, por êsse ponto passa uma infinidade de curvas do outro sistema (já veremos um exemplo).

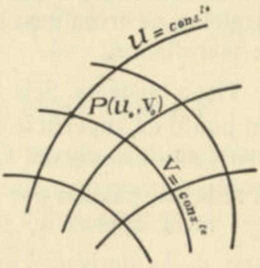


Fig. 43

Daqui resulta que as curvas das duas famílias cobrem a superfície, formando sôbre ela uma *rêde*, de modo tal que os pontos da superfície podem ser individualizados pelas duas curvas, uma de cada família, que por lá passam e, por isso, elas podem ser consideradas como *coordenadas* dos pontos — chamam-se as *coordenadas curvilíneas* dos pontos da superfície.

Os parâmetros u e v que, como acabamos de ver, determinam sôbre a superfície uma rêde de coordenadas curvilíneas, chamam-se *parâmetros de Gauss*.

Uma equação da forma $\varphi(u, v) = 0$ que determine unìvocamente v como função de u, $v = \pi(u)$, reduz o vector-espaço da superfície a ser função, apenas, de um parâmetro — $\mathbf{r}[u, \pi(u)] = \mathbf{R}(u)$ — e, por conseqüência, o logar que corresponde às equações $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ e $\varphi(u, v) = 0$ é uma *curva traçada sôbre a superfície*; essa curva é em geral diferente das curvas da rêde. Recìprocamente, tôda a curva traçada sôbre a superfície resulta da existência duma relação particular $v = f(u)$ entre u e v e é, portanto, a odógrafa dum vector $\mathbf{R}(u) = \mathbf{r}[u, f(u)]$.

Exemplo. Consideremos a representação paramétrica da superfície esférica [1, 3)]

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = r \cos\varphi \,.\, sen\,\theta \,.\, \mathbf{i}_1 + r\, sen\,\varphi \,.\, sen\,\theta \,.\, \mathbf{i}_2 + r \cos\theta \,.\, \mathbf{i}_3 .$$

A rêde de coordenadas curvilíneas é aqui formada pela família de curvas $\theta = const.$ — *paralelos* — e pela família de curvas $\varphi = const.$ — *meridianos*. Por cada ponto da superfície passa uma curva de cada família (é o modêlo do sistema das coordenadas geográficas) à excepção dos pontos P e P' onde, por se reduzirem a um ponto os paralelos, se cruza uma infinidade de meridianos.

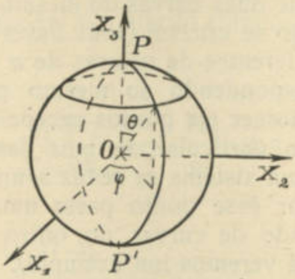


Fig. 44

Plano tangente. Seja $M(u_0, v_0)$ um ponto da superfície e consideremos as duas curvas C_{u_0} e C_{v_0} da rêde que passam por M; sôbre C_{u_0} varia apenas v, sôbre C_{v_0} varia u. As derivadas parciais do vector $\mathbf{r}(u, v)$ tomadas no ponto M são, pela sua própria definição e pela definição de curvas da rêde, os vectores tangentes [**5**] a essas curvas $\rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_M$ é o vector tangente à curva C_{v_0}, $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_M$ tangente a C_{u_0}.

Suponhamos que estes vectores, derivadas parciais, existem, não são nulos (nem colineares) e são funções contínuas de u e v; seja P o plano definido por êles. Vamos demonstrar o seguinte

Teorema. Tôda a curva com tangente, existente sôbre a superfície e passando pelo ponto M, *tem a sua tangente sôbre o plano* P.

Seja C uma curva não pertencente à rêde e nas condições da hipótese; o vector-espaço de que ela é odógrafa, é, pelo que se viu acima, um vector $\mathbf{R}(u) = \mathbf{r}[u, \pi(u)]$. Suponhamos que $v = \pi(u)$ tem derivada no ponto M e calculemos $\left(\frac{d\mathbf{R}}{du}\right)_M$. Visto que, por hipótese, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são contínuas e como $\pi'(u)$ é certamente diferente de zero (caso contrário seria $v = const.$ e C pertenceria à rêde) pode aplicar-se **8**, 44) e tem-se, para vector tangente à curva C,

$\left(\frac{d\mathbf{R}}{du}\right)_M = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_M + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_M \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)_M$ igualdade que mostra [**1**, 7, 44)] que $\left(\frac{d\mathbf{R}}{du}\right)_M$, $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_M$ e $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_M$ são coplanares e que $\left(\frac{d\mathbf{R}}{du}\right)_M$ está, portanto, sôbre o plano P.

Ao plano P dá-se o nome de *plano tangente* à superfície no ponto M; sôbre êle estão, pelo teorema demonstrado, tôdas as tangentes a tôdas as curvas traçadas sôbre a superfície que passam por M (e que têm tangente, claro).

O vector $d\mathbf{r}(u, v)$. Pelo que acaba de ver-se, o vector diferencial total de $\mathbf{r}(u, v)$ [**8**, 45)] $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \mathbf{r}}{dv} \cdot dv$ está sôbre o plano tangente à superfície no ponto em que são tomadas as derivadas parciais. *É o vector infinitésimo do plano tangente*, assim como $d\mathbf{r}(u)$ é [**5**] o vector infinitésimo da tangente à curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.

Normal. Define-se *normal* a uma superfície num ponto como a recta perpendicular ao plano tangente nesse ponto; essa recta tem, conseqüentemente, a direcção do vector

49) $$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{dv}.$$

Representaremos por $\mathbf{n}$ o *vector unitário* da normal; é

50) $$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{du} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{mod\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)}.$$

Equações cartesianas. Utilizando as decomposições cartesianas, tem-se [**8**, 46) e **1**, **11**, 80)]

51) $$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix};$$

os parâmetros directores da normal, ou sejam os coeficientes da equação cartesiana do plano tangente [1, 12] são, portanto, proporcionais aos determinantes funcionais (Jacobianos) seguintes

$$
52)\quad \begin{cases}
a_1 = \dfrac{\partial x_2}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial v} - \dfrac{\partial x_2}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial u} = \dfrac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)} \\[2ex]
a_2 = \dfrac{\partial x_3}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial v} = \dfrac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)} \\[2ex]
a_3 = \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial v} - \dfrac{\partial x_2}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}.
\end{cases}
$$

Se a equação cartesiana da superfície é dada sob a forma $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ é fácil ver que, se um, pelo menos, dos Jacobianos é diferente de zero, é $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{a_1} = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{a_2} = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_3}}{a_3}$ (1) e que, portanto, as equações cartesianas do plano tangente e da normal são

$$
53)\quad \begin{cases}
a)\ (X_1 - x_1)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + (X_2 - x_2)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_2} + (X_3 - x_3)\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \\[2ex]
b)\ \dfrac{X_1 - x_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \dfrac{X_2 - x_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \dfrac{X_3 - x_3}{\frac{\partial F}{\partial x_3}}
\end{cases}
$$

onde (X_1, X_2, X_3) representam as coordenadas correntes e

(1) É o que resulta do estudo do sistema homogéneo

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial u} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial v} = 0.
\end{cases}
$$

(x_1, x_2, x_3) as do ponto, da superfície, de que se trata, sendo as derivadas parciais tomadas nesse ponto.

Exemplo. Na representação da superfície esférica em parâmetros de Gauss $\mathbf{r}(\varphi, \theta) = r\cos\varphi . sen\,\theta . \mathbf{i}_1 + r\,sen\,\varphi . sen\,\theta . \mathbf{i}_2 + r\cos\theta . \mathbf{i}_3$, $r = mod\,\mathbf{r}(\varphi, \theta)$, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r\,sen\,\theta . (-sen\,\varphi . \mathbf{i}_1 + \cos\varphi . \mathbf{i}_2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r . (\cos\varphi . \cos\theta . \mathbf{i}_1 + sen\,\varphi . \cos\theta . \mathbf{i}_2 - sen\,\theta . \mathbf{i}_3) .$$

O primeiro é o vector tangente ao paralelo $\theta = const.$, o segundo tangente ao meridiano $\varphi = const.$ e, como imediatamente se verifica, é $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \Big| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = 0$ o que indica que as duas curvas da rede que se cruzam num ponto, qualquer, são perpendiculares entre si — a rede diz-se, por isso, *ortogonal.*

A direcção da normal à superfície é a do vector

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\,sen\,\varphi\cos\theta & -r\,sen\,\theta \\ -r\,sen\,\varphi\,sen\,\theta & r\cos\varphi\,sen\,\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r\,sen\,\theta . \mathbf{r}(\varphi, \theta)$$

e a normal está, por conseqüência, dirigida segundo o vector-espaço $\mathbf{r}$, isto é, segundo o raio da superfície esférica; o plano tangente é, por isso, perpendicular a $\mathbf{r}$.

10. — **Derivadas parciais dum vector $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$.** Seja o campo vectorial [1, *c*)] $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$. O que foi dito no parágrafo anterior sôbre derivadas parciais dum vector estende-se aqui imediatamente.

A definição dá-se pela igualdade [8, 40)]

$$54) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\mathbf{r}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

e mais duas análogas para $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3}$.

As derivadas de ordem superior definem-se também duma maneira análoga e verificam-se: a propriedade da independência da ordem no caso da continuïdade, a extensão do cálculo formal, a extensão do teorema dos acréscimos e a da fórmula de Taylor.

Define-se ainda *diferencial total* pela igualdade [8, 45)]

$$d\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \cdot dx_k \tag{55}$$

e estende-se imediatamente a regra de derivação da *função composta* [8, 44)].

Se é $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = \sum_k X_k(x_1, x_2, x_3) . \mathbf{i}_k$ a decomposição cartesiana [1, 4)] do vector, tem-se, para expressão da derivada parcial em relação a x_k,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \sum_l \frac{\partial X_l}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_l ; \tag{56}$$

daqui resulta que

$$d\mathbf{r} = \sum_k \left(\sum_l \frac{\partial X_l}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_l \right) \cdot dx_k = \sum_l \left(\sum_k \frac{\partial X_l}{\partial x_k} dx_k \right) \cdot \mathbf{i}_l , \quad \text{donde}$$

$$d\mathbf{r} = \sum_l dX_l . \mathbf{i}_l \tag{57}$$

e esta relação mostra que a *diferencial* do vector se relaciona com a *diferença* como no caso em que o vector é função de um ou dois parâmetros.

11. — **Coordenadas curvilíneas.** Os resultados do número anterior podem ser ainda generalizados desde que se estenda ao espaço o conceito de coordenadas curvilíneas estabelecidas no parágrafo 9 para uma superfície.

Sejam, como habitualmente, (x_1, x_2, x_3) as coordenadas cartesianas rectangulares dum ponto M do espaço, e consideremos três funções

$$u_k = f_k(x_1, x_2, x_3) \qquad k = 1, 2, 3 \tag{58}$$

que suporemos *uniformes, contínuas* no conjunto das três variáveis e *deriváveis* parcialmente até às ordens necessitadas pelos cálculos; suporemos ainda que o Jacobiano

$$I = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$ é diferente de zero.

Nestas condições, é manifesto que ao ponto M, com três coordenadas *únicas* x_1, x_2, x_3 corresponde um terno *único* de valores de u_1, u_2, u_3; e como, na hipótese feita, o sistema $u_k = f_k(x_1, x_2, x_3)$ é resolúvel em ordem a x_1, x_2, x_3 — $x_i = \varphi_i(u_1, u_2, u_3)$ (1) — recìprocamente, a cada terno de valores de u_1, u_2, u_3 coresponde *um* de x_1, x_2, x_3 e, portanto, *um* ponto do espaço; por isso se diz que as relações 58) definem uma *transformação pontual* do espaço. As três variáveis u_1, u_2, u_3 podem, por conseqüência, ser tomadas como definindo um novo sistema de coordenadas, denominadas *coordenadas gerais* ou *coordenadas curvilíneas.*

Êste último nome é justificado pela sua significação geométrica. Efectivamente, seja u_k^0 um valor da variável u_k; a equação $u_k = u_k^0$, ou seja $f_k(x_1, x_2, x_3) = u_k^0$ representa uma superfície passando pelo ponto de que u_k^0 é uma das coordenadas gerais. Daqui resulta que por cada ponto $M_0(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ do espaço passam *três* superfícies cujo conjunto corresponde *unìvocamente* a êsse ponto. O espaço fica, conseqüentemente, dividido por um triplo sistema de superfícies — as superfícies $u_1 = const.$, $u_2 = const.$, $u_3 = const.$ — a que se dá o nome de *superfícies coordenadas*, as quais generalizam a rêde de curvas coordenadas sôbre uma superfície e a respeito das quais se fazem considerações análogas.

As três superfícies coordenadas que passam por um ponto cortam-se duas a duas sôbre três linhas que se denominam *linhas coordenadas* — a *linha-u_1*, intersecção das superfícies $u_2 = const.$ e $u_3 = const.$; a *linha-u_2*, intersecção

---

(1) Vide, por exemplo, J. Hadamard, *Cours d'Analyse*, Tomo I, pg. 25 e seg.

das superfícies $u_1 = const.$ e $u_3 = const.$; a *linha-u_3*, intersecção das superfícies $u_1 = const.$ e $u_2 = const.$ (fig. 45).

Exemplos. a) *O próprio sistema das coordenadas cartesianas* x_1, x_2, x_3. As superfícies $x_k = const.$ $k = 1, 2, 3$ são planos paralelos aos planos coordenados; as linhas coordenadas — linha-x_1, intersecção das superfícies $x_2 = const.$ e $x_3 = const.$, etc. — são paralelas, respectivamente, aos eixos coordenados Ox_1, Ox_2, Ox_3.

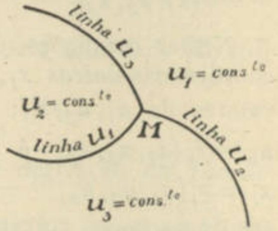


Fig. 45

b) *O sistema das coordenadas esféricas*. É sabido como [1, fig. 39] a posição dum ponto P do espaço pode ser fixada pelas três coordenadas: $r = mod\,\overrightarrow{OP}$, φ longitude, θ colatitude, (lá, era fixo r por se tratar de pontos situados sôbre uma superfície esférica). As superfícies coordenadas são agora: as superfícies $r = const.$, superfícies esféricas com centro em O; as superfícies $\varphi = const.$, planos passando por Ox_3; as superfícies $\theta = const.$, superfícies cónicas com vértice em O. As linhas coordenadas são: as *linhas-r*, intersecções das superfícies $\varphi = const.$ e $\theta = const.$ — rectas saindo de O; as *linhas-φ*, intersecções das superfícies $r = const.$ e $\theta = const.$ — paralelos das esferas de centro em O; as *linhas-θ*, intersecções das superfícies $r = const.$ e $\varphi = const.$ — meridianos das mesmas esferas.

Significação geométrica das derivadas parciais. Triedro tangente. Seja o vector $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ onde u_1, u_2, u_3 são símbolos de coordenadas gerais. Em primeiro logar, estendem-se a êste vector, como é óbvio, não só as definições de derivadas parciais, como os conceitos e propriedades vistas no parágrafo **10**.

Vejamos a significação geométrica da derivada parcial $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$. Consideremos o ponto $M(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$; por definição de derivada parcial [10, 54)], $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right)_M$ é obtida fazendo variar apenas u_1 e conservando constantes os parâmetros u_2 e u_3

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right)_M = \lim_{\Delta u_1 \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_1^0 + \Delta u_1, u_2^0, u_3^0) - \mathbf{r}(u_1^0, u_2^0, u_3^0)}{\Delta u_1}$$

logo, em virtude da significação geométrica do vector derivado de $\mathbf{r}(u)$ [5], o vector $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right)_M$ é tangente no ponto M à odógrafa do vector $\mathbf{R}(u_1) = \mathbf{r}(u_1, u_2^0, u_3^0)$, isto é, é tangente à linha coordenada de intersecção das superfícies coordenadas $u_2 = const.$ e $u_3 = const.$ que passam por M.

Daqui resulta que as três derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ definem, em geral, um triedro de tangentes às linhas coordenadas, triedro que se denomina *triedro tangente* no ponto considerado.

Os três vectores só definem, de facto, um triedro quando não fôrem coplanares, isto é, [1, 15, 118)] quando $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \Big| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \neq 0$. Se, em relação ao triedro fundamental cartesiano, é $\mathbf{r} = \sum_k X_k(u_1, u_2, u_3) \,.\, \mathbf{i}_k$ a decomposição de $\mathbf{r}$, esta condição escreve-se [10, 56) e 1, 15, 114)]

$$59) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} & \frac{\partial X_2}{\partial u_1} & \frac{\partial X_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_2} & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_3} & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial (X_1, X_2, X_3)}{\partial (u_1, u_2, u_3)} \neq 0 .$$

Quando o triedro tangente é trirectangular, o sistema de coordenadas curvilíneas diz-se *ortogonal*. É ortogonal, por exemplo, o sistema das coordenadas esféricas acima descrito.

Transformação de coordenadas. Consideremos uma transformação de coordenadas curvilíneas definida pelas relações

$$60)\qquad u_i = \varphi_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

cujo sistema suporemos uniforme, contínuo e derivável; suponhamos ainda que existe o sistema inverso e que satisfaz às mesmas condições.

As derivadas parciais do vector $\mathbf{r}$ em relação aos $\bar{u}_k$ exprimem-se, em virtude da regra de derivação da função composta, por

$$61)\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_k} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_k}.$$

Anàlogamente, as derivadas em relação aos u_k exprimem-se por

$$62)\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_1} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_3} \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_k} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_k}.$$

Em particular, se a transformação se realiza de coordenadas cartesianas rectangulares para coordenadas cartesianas rectangulares, tem-se, como é sabido, [**2**, 1 e 3]

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} . \bar{x}_k, \qquad \bar{x}_i = \sum_k \alpha_{ki} . x_k;$$

daqui resulta imediatamente que

$$63)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = \alpha_{ik}; \qquad\qquad 63\,a)\qquad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = \alpha_{ki}$$

expressões que se fixam fàcilmente, notando que o primeiro índice do segundo membro é sempre o da letra sem barra.

As derivadas parciais de $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ são, por 61) e 62)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}_k} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \qquad\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}_i} \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}$$

donde, em virtude de 63 e 63 *a*)

64) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \sum\limits_i \alpha_{ik} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}$; 64 *a*) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \sum\limits_i \alpha_{ki} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}$.

12. — **Integrais de vectores.** Os conceitos de função primitiva, integral definido, integrais curvilíneo, de superfície e de volume estendem-se fàcilmente ao caso de se tratar de funções vectoriais.

I. — **Primitiva dum vector $\mathbf{r}(u)$.** Dado o vector $\mathbf{r}(u)$, chama-se *função primitiva* dêle, e representa-se por $\int \mathbf{r}(u).du$, ao vector $\mathbf{R}(u)$ tal que

65) $$\frac{d\mathbf{R}(u)}{du} = \mathbf{r}(u).$$

Desta definição e de 4, prop. 1.ª e 10.ª resulta que se $\mathbf{R}_1(u)$ é uma primitiva de $\mathbf{r}(u)$ o é também a sua soma com um vector constante $\mathbf{c}$ qualquer, e que é $\mathbf{R}(u) = \mathbf{R}_1(u) + \mathbf{c}$ a expressão geral das primitivas de $\mathbf{r}(u)$.

Se é [1, 1)] $\mathbf{r}(u) = \sum\limits_k X_k(u).\mathbf{i}_k$ a decomposição cartesiana do vector, a definição e as considerações feitas implicam imediatamente que

66) $$\mathbf{R}(u) = \int \mathbf{r}(u).du = \sum_k \mathbf{i}_k.\int X_k(u).du + \sum_k c_k.\mathbf{i}_k.$$

II. — **Integral definido.** A definição dá-se como na Análise ordinária — dado o vector $\mathbf{r}(u)$, define-se integral definido pela igualdade

67) $$\int_{u_0}^{U} \mathbf{r}(u).du = lim \sum \mathbf{r}(\eta_i).(u_i - u_{i-1})$$

quando êste limite existe e é o mesmo qualquer que seja a maneira como se efectuou a divisão do intervalo (u_0, U) em intervalos parciais (u_{i-1}, u_i), qualquer que seja o valor η_i de u tomado em cada um dêsses intervalos parciais e qualquer que seja a maneira como êles tendem para zero. Demonstra-se que estas condições são verificadas se $\mathbf{r}(u)$ é função *contínua* de u no intervalo (u_0, U).

Verificam-se as propriedades habituais referentes ao intervalo de integração — se u_1 é um ponto do intervalo (u_0, U) tem-se

$$68)\qquad \int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathbf{r}(u).du = \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}(u).du + \int_{u_1}^{\mathrm{U}} \mathbf{r}(u).du$$

e, além disso,

$$69)\qquad \int_{\mathrm{U}}^{u_0} \mathbf{r}(u).du. = -\int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathbf{r}(u).du.$$

Se $\mathbf{R}(u)$ é uma primitiva de $\mathbf{r}(u)$, tem-se ainda

$$70)\qquad \int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathbf{r}(u).du = \mathbf{R}(\mathrm{U}) - \mathbf{R}(u_0).$$

Se o vector fôr dado pela sua decomposição cartesiana, $\mathbf{r}(u) = \sum_k \mathrm{X}_k(u).\mathbf{i}_k$, é

$$71)\qquad \int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathbf{r}(u).du = \int_{u_0}^{\mathrm{U}} \sum_k \mathrm{X}_k(u).\mathbf{i}_k.du = \sum_k \mathbf{i}_k.\int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathrm{X}_k(u).du.$$

O teorema da média não se verifica com a forma que tem na Análise ordinária. Apliquemos, com efeito, o teorema da média ao segundo membro de 71); supondo as funções $\mathrm{X}_k(u)$ contínuas, tem-se $\int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathrm{X}_k(u).du = (\mathrm{U} - u_0).\mathrm{X}_k(\eta_k)$ onde η_k é um ponto do intervalo (u_0, U). Daqui resulta, somando em k,

$\int_{u_0}^{\mathrm{U}} \mathbf{r}(u).du = (\mathrm{U} - u_0).\sum_k \mathrm{X}_k(\eta_k).\mathbf{i}_k$; o integral não se exprime, portanto, em $\mathbf{r}$ tomado num ponto do intervalo, visto que os η_k dependem, em geral, das funções X_k. É, no entanto, verdadeira a seguinte propriedade: seja ξ um valor do intervalo (u_0, U) e P o ponto correspondente; supondo sempre que as funções $X_k(u)$ são contínuas em todo o intervalo, e portanto em $u = \xi$, façamos tender u_0 e U para ξ; por virtude da continuïdade, $X_k(\eta_k)$ tende para $X_k(\xi)$ e a igualdade acima dá-nos

$$72)\qquad \lim_{u_0, U \to \xi} \frac{\int_{u_0}^{U} \mathbf{r}(u).du}{U - u_0} = \mathbf{r}(\xi).$$

III. — **Integrais curvilíneo, de superfície e de volume.** As definições dão-se como na Análise ordinária e as propriedades são análogas, à parte os teoremas da média.

Dado o vector, função de ponto, $\mathbf{r}(P) = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ e um arco C, finito, duma curva contínua e rectificável [6] de equações $x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \psi(x_1)$, define-se *integral curvilíneo* ao longo de C pela igualdade

$$73)\qquad \int_C \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3).dx_1 = lim \sum \mathbf{r}(P_i).h_i$$

[onde $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ é o ponto correspondente ao valor, qualquer, ξ_i do intervalo $h_i = x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)}$ e $\eta_i = \varphi(\xi_i)$, $\zeta_i = \psi(\xi_i)$] se êste limite existe e é o mesmo qualquer que seja a maneira como se divide o arco C em arcos parciais, qualquer que seja o ponto P_i tomado em cada arco parcial, e qualquer que seja a maneira como os h_i tendem para zero.

Estas condições são verificadas se $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ é função contínua de P, pois, na hipótese acima feita sôbre a curva C, o segundo membro de 73) transforma-se num integral definido de vector função contínua de x_1.

Definem-se anàlogamente $\int_C \mathbf{r}(P).dx_2$, $\int_C \mathbf{r}(P).dx_3$, $\int_C \mathbf{r}(P).ds = lim \sum \mathbf{r}(P_i).s_i$ (v. fig. 46).

Exemplo. Seja uma curva C e dois pontos $A(u_0)$ e $B(u_1)$

e calculemos $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{t}\,.\,ds$. Como [6, 31)] $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, tem-se [1]

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{t}\,.\,ds = \int_{\widehat{AB}} d\mathbf{r} =$$

$$= [\mathbf{r}(u)]_A^B = \mathbf{r}(u_1) - \mathbf{r}(u_0) =$$

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}.$$

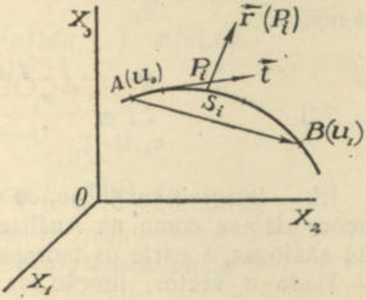


Fig. 46

Quanto às propriedades, verificam-se, entre outras, as seguintes:

$$74) \quad \int_{C_1 + C_2} \mathbf{r}(P).dx_i = \int_{C_1} \mathbf{r}(P).dx_i + \int_{C_2} \mathbf{r}(P).dx_i\,;$$

$$75) \quad \int_{-C} \mathbf{r}(P).dx_i = -\int_{C} \mathbf{r}(P).dx_i$$

e propriedades idênticas para os integrais curvilíneos $\int_C \mathbf{r}(P).ds.$

Os integrais de superfície e de volume definem-se sôbre o mesmo modêlo e as propriedades são análogas. Os teoremas da média não se verificam, mas generaliza-se, na hipótese da *continuïdade*, a igualdade 72) dêste parágrafo. É

$$76) \quad \lim_{S \to 0} \frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3).dS}{S} = \mathbf{r}(P)$$

$$77) \quad \lim_{V \to 0} \frac{\displaystyle\iiint_V \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3).dV}{V} = \mathbf{r}(P)$$

quando o espaço de integração (área ou volume) tende em tôdas as direcções para o ponto P, conservando-o sempre no seu interior.

---

(1) O vector função integranda coïncide aqui com o vector de que a curva C é odógrafa, o que se não dá, evidentemente, em geral.

III. — APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nos parágrafos 5, 6 e 9 do presente capítulo foram já tratadas algumas aplicações geométricas da Análise Vectorial; vamos ainda, a título de exemplo e para mostrar a fecundidade dos métodos dêste ramo da Análise, resolver alguns problemas, que agruparemos sob duas rúbricas gerais — problemas de *métrica* e problemas de *curvatura*.

Os problemas tratados serão em número restrito; o leitor poderá, para mais amplo conhecimento da matéria, consultar as obras indicadas na nota bibliográfica do fim do capítulo.

13. — **Problemas de métrica. Superfícies.** Foi visto já no parágrafo 6 como se define a métrica sôbre uma curva torsa — 6, 26) $ds^2 = d\mathbf{r} \,|\, d\mathbf{r}$. Vamos, por isso, ocupar-nos, apenas, da métrica sôbre as superfícies.

A). **Primeira forma quadrática fundamental.** Seja uma superfície, odógrafa do vector $\mathbf{r}(u, v)$ [u e v parâmetros de Gauss (9)] função contínua e admitindo derivadas parciais finitas e contínuas em tôda a região da superfície sôbre que se operar. Consideremos a rêde de curvas coordenadas $u = const.$, $v = const.$, e seja

$$8, 45) \qquad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot dv$$

o vector *diferencial total* que, como se sabe [9], existe no plano tangente à superfície. Seja C uma curva da superfície, definida por uma relação $v = \pi(u)$ entre os dois parâmetros de Gauss, e suponhamos que C admite tangente, isto é, que pode escrever-se $dv = \pi'(u) \, . \, du$; a cada curva C corresponde um vector $d\mathbf{r}$, tangente a C, existente sôbre o plano tangente e individualizado pela relação $dv = \pi'(u).du$; o seu vector *finito* tangente é

$$78)\qquad \frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \pi'(u).$$

Define-se *comprimento de arco elementar* ds da curva C sôbre a superfície pela igualdade

$$79)\quad ds^2 = d\mathbf{r} | d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot dv\right) \Big| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot dv\right).$$

O critério adoptado para a definição da *métrica sôbre a superfície* é, como se vê, exactamente o mesmo que presidira já à definição da métrica duma curva torsa qualquer [6, 26)].

Desenvolvendo o segundo membro de 79), encontra-se

$$80)\qquad ds^2 = E.du^2 + 2F.dudv + G.dv^2$$

com

$$81)\quad \begin{cases} E = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Big| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(mod \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2 & F = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Big| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ G = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Big| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(mod \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2. & \end{cases}$$

É ao segundo membro de 80) que se dá o nome de *primeira forma quadrática fundamental da teoria das superfícies* e dela depende tudo o que, sôbre uma superfície, diz respeito a métrica.

O comprimento de arco da curva C $[v = \pi(u)]$ entre dois pontos correspondentes aos valores u_0 e u_1 do parâmetro, tira-se imediatamente de 80); tem-se

$$ds^2 = \left[E + 2F \cdot \frac{dv}{du} + G \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right].du^2, \quad \text{donde}$$

$$82)\quad s = \pm \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2F \cdot \frac{dv}{du} + G \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,.du$$

devendo tomar-se o sinal + ou o sinal — conforme convenção análoga à feita no parágrafo 6.

B). **Ângulo de duas curvas da superfície.** Sejam as curvas C_1 e C_2 da superfície, definidas pelas relações $v=\pi(u)$ e $v=\rho(u)$ e sejam [78)] $\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}+\frac{\partial\mathbf{r}}{dv}\cdot\pi'(u)$ e $\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\rho'(u)$ os vectores tangentes respectivos (fig. 47).

Chama-se *ângulo* das duas curvas ao ângulo dos seus dois vectores tangentes; seja êle ω, tem-se [**1**, **14**, 100)]

$$\cos\omega=\frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_1\,\Big|\,\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_2}{mod\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_1\cdot mod\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_2}$$

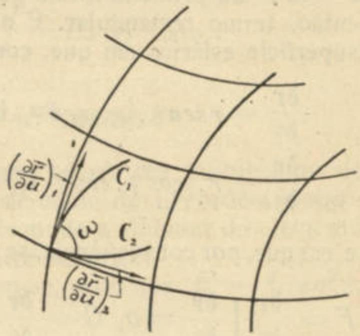


Fig. 47

donde resulta imediatamente, efectuando o produto interno do numerador, atendendo aos valores 81) dos coeficientes da forma e notando que de 79) resulta $mod\, d\mathbf{r}=ds$,

83)
$$\cos\omega=\frac{E+F[\pi'(u)+\rho'(u)]+G\,\pi'(u).\rho'(u)}{\sqrt{E+2F\pi'(u)+G[\pi'(u)]^2}\,.\sqrt{E+2F\rho'(u)+G[\rho'(u)]^2}}\,.$$

Se as duas curvas pertencem à rêde das curvas coordenadas, esta expressão simplifica-se; com efeito, para a curva C_1, $u=const.$, é $\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ e para a curva C_2, $v=const.$, é $\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$, logo $\cos\omega=\cos\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)$ e de

$$F=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=mod\,\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot mod\,\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\cos\omega=\sqrt{E}.\sqrt{G}.\cos\omega$$

resulta

84)
$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}\,.$$

Daqui se conclue que se $F=0$ é $\omega=\frac{\pi}{2}$ e reciprocamente [1], logo *a condição necessária e suficiente para que a rêde de curvas coordenadas seja ortogonal* [9] *é que seja* $F=0$; na primeira forma quadrática fundamental não existe, então, termo rectangular. É o que acontece, por exemplo, na superfície esférica em que, como se viu [9, exemplo] é

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}=r\,sen\,\theta.[-sen\,\varphi\,.\,\mathbf{i}_1+cos\,\varphi\,.\,\mathbf{i}_2]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}=r.[cos\,\varphi\,.\,cos\,\theta\,.\,\mathbf{i}_1+sen\,\varphi\,.\,cos\,\theta\,.\,\mathbf{i}_2-sen\,\theta\,.\,\mathbf{i}_3]$$

e em que, por conseqüência, se tem $E=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\Big|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}=r^2.sen^2\,\theta$, $F=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\Big|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}=0$, $G=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\Big|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}=r^2$, donde

$$85)\qquad ds^2=r^2.[sen^2\,\theta\,.\,d\varphi^2+d\,\theta^2].$$

C). **Elemento de área.** Chama-se elemento de área dS da superfície à área, em valor absoluto, do paralelogramo infinitésimo construído sôbre os dois vectores infinitésimos tangentes às duas curvas da rêde saídas dum ponto.

É portanto, [**1**, 12, 84)]

$$86)\qquad dS=mod[(d\mathbf{r})_1\wedge(d\mathbf{r})_2]$$

representando por $(d\mathbf{r})_1$ e $(d\mathbf{r})_2$ os vectores infinitésimos tangentes, respectivamente, às curvas C_1, $u=const.$, e C_2, $v=const.$; daqui resulta que $(d\mathbf{r})_1=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot dv$, $(d\mathbf{r})_2=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot du$, donde $dS=mod\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\cdot dudv$. Mas [**1**, 14, 103)]

---

(1) Supõe-se que se trata de pontos em que existe plano tangente à superfície e em que, portanto, o denominador não é nulo nem infinito.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\middle|\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2+\left[mod\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\right]^2=$$

$$=\left(mod\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2\cdot\left(mod\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2,$$

donde, por 81), $F^2+\left(\dfrac{dS}{dudv}\right)^2=E.G$, isto é

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,.dudv. \tag{87}$$

O elemento de área é, como se vê, um infinitésimo de 2.ª ordem (considerando du e dv como de 1.ª ordem e equivalentes). A definição foi dada de modo a eliminar do elemento de área os infinitésimos de ordem superior.

Para a superfície esférica tem-se, visto que $E=r^2.sen^2\theta$, $F=0$, $G=r^2$,

$$dS=r^2.sen\,\theta.d\varphi.d\theta. \tag{88}$$

14. — **Problemas de curvatura.** I).—**Curvas torsas.** Seja C uma curva, torsa em geral, odógrafa do vector $\mathbf{r}(s)$, onde o parâmetro s representa o *arco*, com as convenções estabelecidas nos parágrafos 5 e 6. Suporemos que o vector $\mathbf{r}(s)$ admite, para todo o ponto da curva, um derivado não nulo e que, além disso, é derivável até à ordem exigida pelos cálculos.

A). **Triedro de Serret.** Consideremos, tomado num ponto M, o vector [6, 31)] $\mathbf{t}=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ que é, como se sabe, *unitário*. Resulta dêsse facto que $\mathbf{t}|\mathbf{t}=1$, donde, derivando em ordem a s, $\mathbf{t}\left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right.=0$, o que mostra que $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ é perpendicular a $\mathbf{t}$. Seja $\mathbf{n}$ o vector unitário de $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$, isto é, façamos

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\lambda.\mathbf{n}\qquad \lambda>0. \tag{89}$$

Ao vector $\mathbf{n}$ dá-se o nome de *normal principal* à curva no ponto M, e ao plano definido por $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ o de *plano osculador* à curva.

Consideremos ainda o vector

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\,; \tag{90}$$

ao vector $\mathbf{b}$, normal ao plano osculador, dá-se o nome de *binormal* à curva no ponto M.

Ao triedro trirectangular definido pelos três vectores unitários $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ chama-se *triedro de Serret* da curva. Como se vê, êsse triedro não é fixo, varia de ponto para ponto da curva. Os três planos do triedro de Serret são (fig. 48): o plano de $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ — *plano osculador;* o plano de $\mathbf{t}$ e $\mathbf{b}$ — *plano rectificante;* o plano de $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ — *plano normal.*

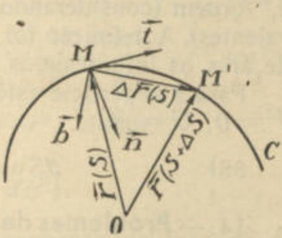


Fig. 48

Para que o sentido do triedro de Serret fique determinado, é necessário e suficiente fixar os sentidos dos vectores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$; ora $\mathbf{t}$ é, como se sabe [5 e 6] dirigido no sentido em que o arco s cresce; basta, por conseqüência, determinar o sentido de $\mathbf{n}$. *Êsse sentido é tal que o ângulo de* $\overrightarrow{MM'} = \Delta\,\mathbf{r}(s)$ *com* $\mathbf{n}$ *é agudo.* Para o verificar, desenvolvamos $\Delta\,\mathbf{r}(s)$ pela fórmula de Taylor; vem [7, 38)]

$$\Delta\,\mathbf{r}(s) = \Delta s \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta s^2 \cdot \left[\frac{d^2\,\mathbf{r}}{ds^2} + \boldsymbol{\delta}(s)\right]$$

$$= \Delta s \,.\, \mathbf{t} + \frac{1}{2!} \cdot \Delta s^2 \,.\left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} + \boldsymbol{\delta}(s)\right]$$

com $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \boldsymbol{\delta}(s) = 0,$ e onde as derivadas são tomadas no ponto M. Multipliquemos escalarmente ambos os membros por $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$; tem-se $\Delta\,\mathbf{r}(s) \Big| \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{2!} \cdot \Delta s^2 \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} \Big| \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} + \boldsymbol{\delta}(s)\right]$

e como $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \Big| \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} + \boldsymbol{\delta}(s)\right] > 0$ para valores suficientemente pequenos de s, é $\Delta \mathbf{r}(s) \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} > 0, \right.$ o que mostra ser agudo o ângulo de $\Delta \mathbf{r}(s) = \overrightarrow{MM'}$ com $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \lambda . \mathbf{n}$ e portanto com $\mathbf{n}$, por ser $\lambda > 0$. Esta propriedade pode exprimir-se dizendo que *o vector* $\mathbf{n}$ *está dirigido no sentido da concavidade da curva no ponto* M.

Notemos, de passagem, que a fórmula de Taylor, acima escrita, $\Delta \mathbf{r}(s) = \Delta s . \mathbf{t} + \frac{1}{2!} . \Delta s^2 . [\lambda . \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}(s)]$ mostra [**1**, *7*, 44)] que $\overrightarrow{MM'} = \Delta \mathbf{r}(s)$ está no plano dos vectores $\mathbf{t}$ e $\lambda . \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}(s)$; quando Δs tende para zero, isto é, quando M′ tende para M sôbre a curva, $\lambda . \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}(s)$ tende para $\lambda . \mathbf{n}$ e êsse plano tende, portanto, para o plano osculador, logo *o plano osculador é a posição lim te do plano definido pelo ponto* M, *um ponto* M′, *vizinho de* M *sôbre a curva, e o vector* $\mathbf{t}$.

B). **Fórmulas de Frenet.** Consistem essas fórmulas nas expressões das derivadas dos vectores **t, n, b** em relação ao arco s.

Comecemos pelo vector **t**; tem-se [89)] $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \lambda . \mathbf{n}$; vejamos a significação do coeficiente λ. Para isso, tracemos, com centro num ponto O arbitrário, (fig. 49) uma esfera de raio unidade. Quando o ponto M se desloca sôbre a curva, o vector equipolente a **t** tirado por O descreve sôbre a superfície dessa esfera uma curva que se chama *indicatriz* das tangentes; seja σ o arco da indicatriz, contado a partir dum ponto A′ que se faz corresponder a A, origem dos arcos sôbre C; toma-se como sentido positivo do arco σ aquele em que σ cresce com s.

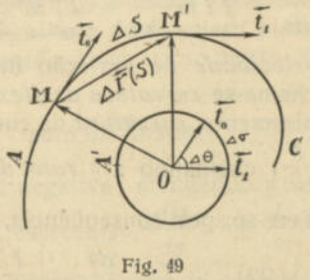


Fig. 49

Ao deslocamento infinitésimo Δs de M sôbre a curva corresponde, na indicatriz, o deslocamento $\Delta\sigma$ que mede o ângulo $\Delta\theta$ das tangentes nos pontos M e M'; pela hipótese feita da derivabilidade, **t** é função contínua de s e $\Delta\sigma$ é, portanto, infinitésimo com Δs.

Pela lei de derivação da função de função, tem-se $\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{ds}$ que mostra que $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ e $\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}$ têm a mesma direcção e sentido visto que $\frac{d\sigma}{ds}$ é um escalar positivo por ser σ crescente com s; ora $\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}$ é um vector unitário, visto que $\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta\sigma}$ e, pela métrica adoptada nas curvas torsas [6], é $\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{mod\,\Delta\mathbf{t}}{\Delta\sigma}=1$; é portanto $\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}=\mathbf{n}$ e em virtude de 89) pode escrever-se

$$91)\qquad \frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d\sigma}{ds}\cdot\mathbf{n}\quad\rightarrow\quad\lambda=\frac{d\sigma}{ds}.$$

Vejamos a significação geométrica de $\frac{d\sigma}{ds}$; é $\frac{d\sigma}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$. A êste limite, que mede a *velocidade* de variação na direcção da tangente à curva C, chama-se *curvatura de flexão*, ou *primeira curvatura*, ou, simplesmente, *curvatura* da curva no ponto M e representa-se por $\frac{1}{\rho}$, chamando a ρ *raio de curvatura* da curva no ponto M. Tem-se, por conseqüência,

$$92)\qquad \lambda=\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{\rho}\quad\rightarrow\quad\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\cdot\mathbf{n}.$$

Dá-se, ainda, o nome de *centro de curvatura* da curva no ponto M à extremidade do vector $\rho.\mathbf{n}$ com origem nêsse ponto.

Passemos agora ao vector **b**. De ser **b** unitário, resulta, como para **t**, $\mathbf{b} \,|\, \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$ e como, por outro lado, é $\mathbf{b} \,|\, \mathbf{t} = 0$,

tem-se $\mathbf{b} \,|\, \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \mathbf{t} \,|\, \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$ donde, por 92), $\mathbf{t} \,|\, \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$,

logo $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$, perpendicular a **b** e **t**, está na direcção de **n**, isto é,

93) $$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mu . \mathbf{n} \qquad \mu \gtrless 0 .$$

Para determinar μ, procedamos, em relação às binormais **b**, exactamente como acima em relação às tangentes; construída a indicatriz das binormais e chamando σ' ao arco dessa indicatriz, tem-se $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma'} \cdot \frac{d\sigma'}{ds}$ e $\frac{d\mathbf{b}}{d\sigma'}$ é, por uma razão análoga à de cima, um vector unitário, logo

94) $$\frac{d\mathbf{b}}{d\sigma'} = \pm \mathbf{n} .$$

Quanto a $\frac{d\sigma'}{ds}$, tem-se $\frac{d\sigma'}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sigma'}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta'}{\Delta s}$, chamando θ' ao ângulo das duas binormais vizinhas. Êste limite, que mede a *velocidade* de variação da direcção da binormal ou, o que é o mesmo, a velocidade de variação da direcção do plano osculador e, portanto, a maior ou menor *intensidade* segundo a qual a curva difere duma curva plana, chama-se *segunda curvatura* ou *torsão* da curva no ponto M, e escreve-se

95) $$\frac{d\sigma'}{ds} = \frac{1}{\tau} \qquad \tau \textit{ raio de torsão.}$$

A torsão pode ser positiva ou negativa; atendendo a 94) e 95), a derivada $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma'} \cdot \frac{d\sigma'}{ds}$ escreve-se $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \pm \frac{1}{\tau} \cdot \mathbf{n}$ e o sinal da torsão depende, por conseqüência, de serem ou não do mesmo sentido os vectores $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ e **n**. Convencionando tomar como positiva a torsão quando êsses dois vectores são de sentidos contrários (o que equivale, como fàcilmente se vê, a tomar como sentido positivo de movimento das binormais quando s cresce, o sentido directo), tem-se

$$96) \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau} \cdot \mathbf{n}.$$

Ocupemo-nos, finalmente, do vector **n.** De $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ [conseqüência de 90)] resulta $\dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{b}}{ds} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ donde, por 92) e 96)

$$97) \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{\tau} \cdot \mathbf{b}.$$

É às fórmulas

$$\begin{cases} 92) & \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{1}{\rho} \cdot \mathbf{n} \\ 96) & \dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = -\dfrac{1}{\tau} \cdot \mathbf{n} \\ 97) & \dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \mathbf{t} + \dfrac{1}{\tau} \cdot \mathbf{b} \end{cases}$$

que se dá o nome de *fórmulas de Frenet*.

Se a curva C é *plana*, o plano osculador é o plano da curva, a binormal é constantemente perpendicular a êsse plano e portanto a torsão é identicamente nula; à primeira curvatura chama-se então, simplesmente, *curvatura* da curva plana.

C). **Cálculo das curvaturas.** Da primeira fórmula de Frenet resulta imediatamente que

$$98) \qquad \frac{1}{\rho} = mod \frac{d\mathbf{t}}{ds} = mod \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

Da segunda e primeira resulta

$\dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = -\dfrac{1}{\tau} \cdot \rho \cdot \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = -\dfrac{1}{\tau} \cdot \rho \cdot \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$; por outro lado,

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{d}{ds}(\mathbf{t}\wedge\mathbf{n})=\frac{d}{ds}\left(\mathbf{t}\wedge\rho\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\rho\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)$$
$$=\rho\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\wedge\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\left(\frac{d\rho}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}+\rho\cdot\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)$$
$$=\frac{d\rho}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}+\rho\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}.$$

Igualando os dois valores de $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$, multiplicando escalarmente por $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ e simplificando, vem $-\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\Big|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=$ $=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\Big|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ donde, por 98) e atendendo às propriedades do produto mixto [**1**, 15]

99) $$\frac{1}{\tau}=\rho^2\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\wedge\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}.$$

Costuma, ainda, definir-se *curvatura total* duma curva torsa como o número k tal que

100) $$\frac{1}{k}=mod\frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

A terceira fórmula de Frenet mostra imediatamente que, por serem $\mathbf{t}$ e $\mathbf{b}$ perpendiculares entre si, é

101) $$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}.$$

Se o parâmetro não é o *arco*, isto é, se a curva C é descrita vectorialmente por um vector $\mathbf{r}(u)$, calculam-se fàcilmente, a partir de 98) e 99), as expressões das curvaturas. Tem-se, pela lei de derivação da função de função,

$$\frac{d\mathbf{r}}{du}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{du},\ \frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{du}\right)^2+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2s}{du^2},$$
$$\frac{d^3\mathbf{r}}{du^3}=\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\cdot\left(\frac{ds}{du}\right)^3+3\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\cdot\frac{ds}{du}\cdot\frac{d^2s}{du^2}+\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^3s}{du^3},$$

donde, depois de simplificações evidentes,

$$\frac{d\mathbf{r}}{du}\wedge\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}=\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\left(\frac{ds}{du}\right)^3,$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{du}\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\wedge\frac{d^3\mathbf{r}}{du^3}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\wedge\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\cdot\left(\frac{ds}{du}\right)^6.$$

Ora, por ser $\mathbf{t}=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ unitário e $ang\left(\mathbf{t},\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ tem-se $mod\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\wedge\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)=mod\,\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ logo, de 98) resulta

102) $$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\left(\frac{ds}{du}\right)^3}\cdot mod\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\wedge\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\right)$$

e de 99) tira-se

103) $$\frac{1}{\tau}=\rho^2\cdot\frac{1}{\left(\frac{ds}{du}\right)^6}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{du}\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\wedge\frac{d^3\mathbf{r}}{du^3}\right..$$

D). **Expressões cartesianas.** Seja $\mathbf{r}(s)=\sum\limits_k x_k(s).\mathbf{i}_k$ a decomposição cartesiana do vector que descreve a curva C, isto é, sejam $x_k=x_k(s)$, $k=1,2,3,$ as equações cartesianas da curva. Tem-se imediatamente

104) $$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\sum_k\frac{dx_k}{ds}\cdot\mathbf{i}_k$$

105) $$\mathbf{n}=\rho.\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\rho.\sum_k\frac{d^2x_k}{ds^2}\cdot\mathbf{i}_k$$

106) $$\mathbf{b}=\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}=\rho.\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ x_1'(s) & x_2'(s) & x_3'(s)\\ x_1''(s) & x_2''(s) & x_3''(s)\end{vmatrix}.$$

Os coeficientes do plano osculador, proporcionais às coordenadas da binormal, são

107) $A=x_2'.x_3''-x_3'.x_2''$; $B=x_3'.x_1''-x_1'.x_3''$; $C=x_1'.x_2''-x_2'.x_1''$

(derivadas tomadas em relação a s).

Para as curvaturas, tem-se: de 98):

$$108) \qquad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\sum_k [x_k''(s)]^2}$$

de 99):

$$109) \quad \frac{1}{\tau} = \rho^2 . D = \frac{1}{\sum_k [x_k''(s)]^2} \cdot D \leftarrow D = \begin{vmatrix} x_1'(s) & x_2'(s) & x_3'(s) \\ x_1''(s) & x_2''(s) & x_3''(s) \\ x_1'''(s) & x_2'''(s) & x_3'''(s) \end{vmatrix}.$$

Se o parâmetro do vector não é o arco s, resulta de 102) que

$$110) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{ds}{du}\right)^3}$$

onde A, B, C são dados por 107) mas com as derivadas tomadas em relação a u.

De 103) e 110) tira-se, para a torsão,

$$111) \qquad \frac{1}{\tau} = \rho^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{ds}{du}\right)^6} \cdot D_1 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot D_1$$

onde D_1 é o determinante D de 109) mas com as derivadas tomadas em ordem a u.

15. — **Problemas de curvatura.** II). — **Superfícies.** Seja uma superfície S, odógrafa do vector $\mathbf{r}(u, v)$ que supomos função contínua dos parâmetros de Gauss u e v e admitindo, em relação a êles, derivadas parciais até à ordem exigida pelos cálculos em cada ponto da superfície; supomos ainda que as derivadas de 1.ª ordem são diferentes de zero.

A). — **Normal. Plano tangente.** No parágrafo 9 definiu-se vector unitário normal à superfície pela igualdade

$$9,50) \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{mod\,\mathbf{N}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{mod\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)}.$$

Dêste vector deduz-se fàcilmente outra expressão, onde figuram os coeficientes da primeira forma quadrática funda-

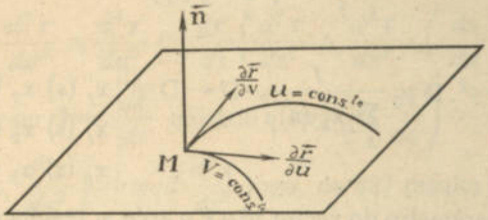


Fig. 50

mental [13, 80) e 81)]. Com efeito, de 1, 14, 103) resulta

$$\left[mod\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\right]^2+\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Big|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2=\left(mod\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2\cdot\left(mod\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2$$

que, em virtude de 13, 81) se escreve

$$mod\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)=\sqrt{EG-F^2} \quad \text{logo}$$

$$112) \qquad \mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{H}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \leftarrow H=EG-F^2.$$

O plano tangente em M à superfície é, como se sabe, o plano perpendicular à normal nêsse ponto; a sua equação vectorial é, portanto,

$$113) \qquad \overrightarrow{MP}\Big|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=0.$$

B). — **Segunda forma quadrática fundamental.** No parágrafo 13 definiu-se a prímeira forma quadrática (em du e dv) da teoria das superfícies e viu-se que dela dependem as suas propriedades métricas. Vamos agora definir outra forma quadrática em du e dv, com a qual estão ligadas as propriedades de curvatura da superfície. *Essa forma define-se como igual ao produto escalar* $-d\mathbf{r}|d\mathbf{n}$. Tem-se, por conseqüência,

$$-d\mathbf{r}|d\mathbf{n}=-\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot dv\right)\Big|\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\cdot dv\right)=$$

$$=-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\cdot du^2-\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\left|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right)\cdot dudv-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\cdot dv^2,$$

isto é,

$$114)\quad -d\mathbf{r}\,|\,d\mathbf{n}=D\,.\,du^2+2\,D'\,.\,dudv+D''\,.\,dv^2$$

com

$$115)\quad D=-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right.,\quad D'=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\right),$$

$$D''=-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\left|\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\right..$$

A êstes coeficientes pode dar-se outra forma; derivando as relações evidentes $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\mathbf{n}=0,\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathbf{n}=0$ em relação a u e v, tem-se $D=\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{du^2}\left|\mathbf{n},\ D'=\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\right|\mathbf{n},\ D''=\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\Big|\mathbf{n}$, donde, substituindo $\mathbf{n}$ pelo seu valor 112),

$$116)\quad D=\frac{1}{\sqrt{H}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\wedge\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\right.,\quad D'=\frac{1}{\sqrt{H}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\wedge\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\right.,$$

$$D''=\frac{1}{\sqrt{H}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\wedge\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\right..$$

Vamos ver, por alguns exemplos, como aos problemas de curvatura interessa, de facto, a forma 114).

C). — **Curvatura normal duma curva sôbre a superfície.** Seja C

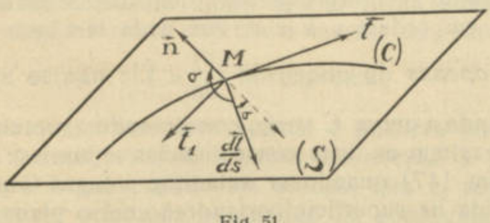


Fig. 51

uma curva traçada sôbre a superfície S, **t** o vector unitário da tangente a essa curva e $\mathbf{n}_1$ o vector unitário da sua normal principal [14], dirigido, como se sabe, segundo $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$; seja ainda $\mathbf{n}$ o vector unitário da normal à superfície.

Os dois planos $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, normal à superfície, e $\left(\mathbf{t}, \frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)$, osculador à curva C, são, em geral, diferentes; se representarmos por σ o ângulo de $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ com $\mathbf{n}$, o ângulo dos dois planos é σ ou $\pi - \sigma$ conforme $\mathbf{n}$ fôr dirigido ou não para o mesmo lado da superfície que $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$.

Pôsto isto, consideremos o produto escalar $\frac{d\mathbf{t}}{ds} | \mathbf{n}$, que representaremos por N. É [14, 92)] $N = \frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{n}_1 | \mathbf{n} = \frac{1}{\rho} \cdot \cos\sigma$; e como, por serem $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ ortogonais, se tem $\frac{d\mathbf{t}}{ds} | \mathbf{n} + \mathbf{t} | \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0$, vem $N = \frac{1}{\rho} \cdot \cos\sigma = -\mathbf{t} \left| \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right. = -\frac{d\mathbf{r}}{ds} \left| \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right. = -\frac{d\mathbf{r} | d\mathbf{n}}{ds^2}$ ou seja por 114) e 13, 80)

$$117) \quad N = \frac{1}{\rho} \cdot \cos\sigma = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Desta igualdade tira-se a seguinte conclusão importante — o segundo membro depende, além das derivadas parciais de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{n}$ em ordem a u e v, que nada têm que vêr com a curva C, *apenas* do quociente $\frac{dv}{du}$. Êle não se altera, portanto, quando a curva C varia, conservando a mesma tangente, e daqui resultam as duas conseqüências seguintes: *a*) tudo se mantém em 117) quando se substitue a curva C pela secção plana obtida na superfície cortando-a com o plano osculador a C; com efeito, tanto o segundo membro de 117) como σ conservam o mesmo valor; *b*) se fôr C_1 outra curva, sôbre a superfície, com a mesma tangente que C e plano osculador diferente, chamando σ_1 ao ângulo da sua normal principal com **n** e ρ_1 ao seu raio de curvatura, tem-se

118) $$\frac{1}{\rho}\cdot\cos\sigma = \frac{1}{\rho_1}\cdot\cos\sigma_1 .$$

Em particular, se para a secção plana C é $\sigma = 0$, isto é, se o plano da secção coïncide com o plano (**t, n**), (C diz-se, então, uma *secção normal* à superfície), tem-se, chamando R ao seu raio de curvatura

119) $$N = \frac{1}{R}.$$

Isto é, quando C é uma secção *normal*, N é a sua *curvatura* (flexão); por isso a N se dá, em geral, o nome de *curvatura normal* duma curva C da superfície.

De 117) e 119) resulta que

120) $$N = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\cdot\cos\sigma \quad \rightarrow \quad \rho = R.\cos\sigma$$

igualdade que mostra que o centro de curvatura da curva C se obtém projectando sôbre o seu plano osculador o centro de curvatura da secção normal que tem a mesma tangente *(teorema de Meusnier)*.

Em resumo: a) a curvatura normal e a curvatura de flexão, num ponto, duma curva qualquer sôbre a superfície, são iguais à da secção plana que se obtém cortando, nesse ponto, a superfície com o plano osculador à curva; *b)* o estudo da curvatura duma secção plana reduz-se, por 120), à da secção normal que tem a mesma tangente.

Como é sempre $\rho > 0$, a expressão $N = \frac{1}{\rho}\cdot\cos\sigma$ mostra ainda que a curvatura normal é positiva ou negativa conforme a normal principal à curva e a normal à superfície formarem um ângulo agudo ou obtuso, isto é, conforme a normal **n** estiver orientada no sentido da concavidade ou no da convexidade da superfície.

D). **Curvatura geodésica.** Seja a curva C nas condições anteriores; chama-se *curvatura geodésica* de C ao produto escalar $G=\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\Big|\mathbf{t}_1$, chamando $\mathbf{t}_1$ ao vector unitário perpendicular à tangente $\mathbf{t}$ e existente sôbre o plano tangente à superfície; é claro que (fig. 51) $\mathbf{t}_1$ é perpendicular ao plano $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ e o ângulo de $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ com $\mathbf{t}_1$ é $\sigma-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}+\sigma$ conforme $\mathbf{n}$ estiver orientada no sentido da convexidade ou no da concavidade da superfície; é, portanto

$$121) \qquad G=\frac{1}{\rho}\cdot\mathbf{n}_1|\mathbf{t}_1=\pm\frac{1}{\rho}\cdot sen\,\sigma$$

e G é, afinal, a curvatura da projecção de C sôbre o plano tangente à superfície.

E). **Linhas geodésicas.** Dá-se êste nome a tôda a curva traçada sôbre a superfície cujo plano osculador em cada ponto coïncide com o plano $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, isto é, tal que quando o ponto M descreve a curva o plano osculador se mantém normal à superfície. Para uma geodésica tem-se, por ser $\sigma=0$ ou $\sigma=\pi$,

$$122) \qquad G=0, \quad N=\pm\frac{1}{\rho};$$

a sua curvatura geodésica é portanto nula e a sua curvatura normal é, à parte o sinal, igual à sua curvatura de flexão.

F). **Linhas assintóticas.** Dá-se êste nome às curvas da superfície que têm em cada ponto curvatura normal nula. É, por conseqüência, [117)] $\sigma=\dfrac{\pi}{2}$, (a menos que se trate de rectas) isto é, as linhas assintóticas são aquelas cujo plano osculador coïncide com o plano tangente à superfície. De 117) resulta ainda que a equação diferencial das linhas assintóticas é

$$123) \qquad D.du^2+2D'.dudv+D''.dv^2=0.$$

Uma discussão elementar mostra que os pontos da superfície se podem classificar, em relação à existência de assintóticas, em: *a*) ponto em que $D'^2-D.D''>0$ — a equação

123) tem duas raíses reais em $\frac{dv}{du}$, logo há duas assintóticas reais e o ponto diz-se *hiperbólico*; *b*) ponto em que $D'^2 - D.D'' = 0$ — as duas assintóticas são coïncidentes e o ponto diz-se *parabólico*; *c*) ponto em que $D'^2 - D.D'' < 0$ — as assintóticas são imaginárias e o ponto diz-se *elíptico*.

G). **Curvaturas principais.** Voltemos à expressão da curvatura normal $N = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$; fazendo $\frac{dv}{du} = \lambda$, tem-se

$$N.(E + 2F.\lambda + G.\lambda^2) - (D + 2D'.\lambda + D''.\lambda^2) = 0,$$

equação do 2.° grau em λ que se escreve

$$124) \quad (NG - D'').\lambda^2 + 2.(FN - D').\lambda + NE - D = 0$$

e que mostra que por cada ponto da superfície passam, em geral, duas curvas $\left(\text{dois valores de } \lambda = \frac{dv}{du}\right)$ correspondentemente a cada valor de N. A condição necessária e suficiente para que essas duas curvas sejam reais e coïncidentes é que $(FN - D')^2 - (NG - D'').(NE - D) = 0$. Esta equação é, como se vê, do 2.° grau em N

$$125) \quad (EG - F^2).N^2 + (2FD' - DG - ED'').N + DD'' - D'^2 = 0$$

e às suas duas raízes, N_1 e N_2, dá-se o nome de *curvaturas principais* da superfície no ponto considerado. Demonstra-se que as curvaturas principais constituem os valores extremos (máximo e mínimo) da curvatura normal e nesta propriedade reside a sua particular importância.

H). **Curvatura duma superfície.** A curvatura duma curva plana mede-se pela variação de direcção da sua normal; as duas curvaturas duma curva torsa medem-se pela variação de direcção da sua normal principal (flexão) e da sua binormal (torsão). No caso duma superfície, o problema é mais complicado — a forma da superfície na vizinhança dum ponto depende do comportamento da infinidade de curvas da superfícíe que passam por êsse ponto e é, evidentemente, impossível dar uma definição de curvatura (que convém que seja simples) que abranja todos êsses elementos. Mas algumas considerações anteriores [C)] permitem guiar-nos na escôlha duma função que possa caracterizar a curvatura duma superfície num ponto.

Em primeiro logar, podem considerar-se apenas as secções planas; destas, as não normais podem excluir-se, visto que o estudo do seu comportamento se reduz imediatamente ao das secções normais [120)]; por outro lado, das secções normais há ainda, como privilegiadas, as *principais*, correspondendo a valores extremos da curvatura normal; o problema reduz-se, portanto, à escôlha duma função conveniente das curvaturas principais N_1 e N_2.

Há várias definições de curvatura; citaremos duas, sem entrar em mais detalhes sôbre o assunto:

a) curvatura *total (Gauss)*

$$126) \qquad K = N_1 . N_2 = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2};$$

b) curvatura *média (Sophie Germain)*

$$127) \qquad K_1 = \frac{1}{2} \cdot (N_1 + N_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2FD' - DG - ED''}{EG - F^2}.$$

IV. — DERIVAÇÃO TENSORIAL E DERIVAÇÃO DIRIGIDA

16. — **Derivação tensorial dum vector.** Seja o campo vectorial [1] $\mathbf{r}(\mathrm{P}) = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = \sum_k \mathrm{X}_k(x_1, x_2, x_3) . \mathbf{i}_k$ onde (x_1, x_2, x_3) é um sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Construamos o *sistema* [**2,** 7] de 2.ª ordem, de componentes

$$128) \qquad t_{i|k} = \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_k},$$

e vejamos como elas se comportam quando se efectua uma transformação ortogonal de coordenadas [**2,** 1, 6)] $x_j = \sum_k \alpha_{jk} . \bar{x}_k$.

Chamando *componente transformada* no novo sistema $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ à expressão $\bar{t}_{i|k} = \frac{\partial \bar{\mathrm{X}}_i}{\partial \bar{x}_k}$, tem-se, utilizando a regra de derivação da função composta [10] e atendendo a **11,** 63 *a*),

$$t_{i|k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_l \alpha_{il} . \bar{\mathrm{X}}_l = \sum_l \alpha_{il} . \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\mathrm{X}}_l$$

$$= \sum_l \alpha_{il} . \sum_r \frac{\partial \bar{\mathrm{X}}_l}{\partial \bar{x}_r} . \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_k} = \sum_l \alpha_{il} . \sum_r \alpha_{kr} . \frac{\partial \bar{\mathrm{X}}_l}{\partial \bar{x}_r} = \sum_{lr} \alpha_{il} . \alpha_{kr} . \frac{\partial \bar{\mathrm{X}}_l}{\partial \bar{x}_r}$$

$$= \sum_{lr} \alpha_{il} . \alpha_{kr} . \bar{t}_{l|r} .$$

Quanto à transformação inversa, tem-se, anàlogamente,

$$\overline{t}_{l/k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{X}_l = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_l \alpha_{ll}.X_l = \sum_l \alpha_{ll}.\frac{\partial}{\partial x_k}X_l$$

$$= \sum_l \alpha_{ll}.\sum_r \frac{\partial X_l}{\partial x_r}.\frac{\partial x_r}{\partial \overline{x}_k} = \sum_l \alpha_{ll}.\sum_r \alpha_{rk}.\frac{\partial X_l}{\partial x_r} = \sum_{lr} \alpha_{ll}.\alpha_{rk}.\frac{\partial X_l}{\partial x_r}$$

$$= \sum_{lr} \alpha_{ll}.\alpha_{rk}.t_{l/r}.$$

Êstes dois resultados mostram, por **2**, *7*, 40) e 41), que as componentes $t_{l/k}$ se comportam como as de um tensor de 2.ª ordem.

Definição. — Ao tensor $t_{l/k}$, definido por 128), chama-se tensor derivado do vector $\mathbf{r}(\mathrm{P}) = \sum_k X_k(x_1, x_2, x_3).\mathbf{i}_k$ *e à operação pela qual êle se obtém chama-se derivação tensorial do vector* $\mathbf{r}(\mathrm{P})$.

Esta operação generaliza-se, como fàcilmente se vê, a um tensor de ordem qualquer cujas componentes sejam funções das coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3); obtém-se, como é óbvio, um novo tensor, cuja ordem é superior numa unidade à do anterior.

A operação de derivação tensorial está, como veremos no capítulo seguinte, na base da teoria matemática dos campos.

17. — **Derivação dirigida.** O conceito de *derivada dirigida* ou *derivada segundo uma direcção* é uma generalização do conceito de derivada parcial. Seja, no espaço a três dimensões, referido a um sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, o escalar $m(\mathrm{P})$; ¿o que significa

$$\frac{\partial m}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{m(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - m(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}?$$ significa

que esta derivada é o limite da razão incremental quando do ponto $\mathrm{P}_0(x_1, x_2, x_3)$ se passa ao ponto $\mathrm{P}_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)$, isto é, quando se deu ao ponto um deslocamento infinitésimo *sôbre uma paralela ao eixo* $\mathrm{O}x_1$. Do mesmo modo, $\frac{\partial m}{\partial x_2}$, $\frac{\partial m}{\partial x_3}$

são obtidas dando ao ponto, argumento de $m(\mathrm{P})$, deslocamentos infinitésimos sôbre paralelas respectivamente aos eixos Ox_2 e Ox_3. Pois bem, no conceito geral de derivada dirigida, a direcção saindo de P_0, e sôbre a qual se efectua o deslocamento, é qualquer; as derivadas parciais aparecem assim como derivadas dirigidas particulares — as derivadas segundo as direcções dos eixos.

O que está dito para um escalar aplica-se *ipsis verbis* a um vector $\mathbf{r}(\mathrm{P})$. Calculemos as derivadas.

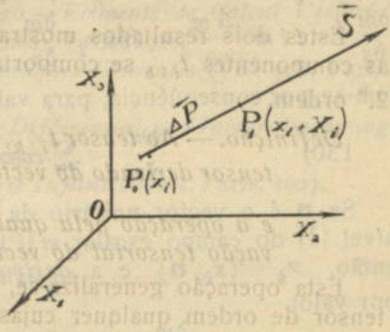


Fig. 52

A). **Derivada de um escalar.** Seja o escalar $m(\mathrm{P})$ e um ponto $\mathrm{P}_0(x_1, x_2, x_3)$ do espaço. Seja $\mathbf{s} = \sum_k a_k . \mathbf{i}_k$ um vector livre, e seja $\overrightarrow{\Delta \mathrm{P}} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$ um deslocamento infinitésimo na direcção de $\mathbf{s}$ (fig. 52); chama-se *derivada dirigida* do escalar m *segundo* $\mathbf{s}$, e representa-se por $\dfrac{\partial m}{\partial s}$, ao escalar definido pela igualdade

$$129) \qquad \frac{\partial m}{\partial s} = \lim_{\overrightarrow{\Delta \mathrm{P}} \to 0} \frac{m(\mathrm{P}_1) - m(\mathrm{P}_0)}{mod\, \overrightarrow{\Delta \mathrm{P}}}$$

se existir o limite do segundo membro quando P_1 tende para P_0 de qualquer maneira, mas sôbre a linha de acção de $\mathbf{s}$.

Fazendo $mod\, \overrightarrow{\Delta \mathrm{P}} = \rho$, tem-se $\overrightarrow{\Delta \mathrm{P}} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 = \mathrm{X}_1 . \mathbf{i}_1 + \mathrm{X}_2 . \mathbf{i}_2 + \mathrm{X}_3 . \mathbf{i}_3 = \rho . \cos \alpha_1 . \mathbf{i}_1 + \rho . \cos \alpha_2 . \mathbf{i}_2 + \rho . \cos \alpha_3 . \mathbf{i}_3$ sendo $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ os cosenos directores do suporte de $\mathbf{s}$, isto é, as componentes do vector *unitário* $\dfrac{\mathbf{s}}{mod\, \mathbf{s}}$;

é, portanto, fazendo $m(P_1)-m(P_0)=\Delta m$,

$$\Delta m = m(x_1+\rho\cos\alpha_1,\, x_2+\rho\cos\alpha_2,\, x_3+\rho\cos\alpha_3) - m(x_1, x_2, x_3).$$

Suponhamos que a função $m(P)$ é tal que se lhe pode aplicar a fórmula de Taylor; vem

$$\Delta m = \rho\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial m}{\partial x_1}+\rho\cos\alpha_2\cdot\frac{\partial m}{\partial x_2}+\rho\cos\alpha_3\cdot\frac{\partial m}{\partial x_3}+\rho^2.F$$

onde F é finito. Resulta daqui que, pela definição [129)] é

$$\frac{\partial m}{\partial s}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta m}{\rho}=\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial m}{\partial x_1}+\cos\alpha_2\cdot\frac{\partial m}{\partial x_2}+\cos\alpha_3\cdot\frac{\partial m}{\partial x_3};$$

tem-se, por conseqüência, para valor da derivada dirigida,

$$130)\qquad \frac{\partial m}{\partial s}=\sum_k \cos\alpha_k\cdot\frac{\partial m}{\partial x_k}.$$

Se $\mathbf{n}$ é o vector unitário da normal a uma superfície de nível [1] do campo escalar $m(P)$ passando pelo ponto P, é, então, $\alpha_k=(x_k, \mathbf{n})$ e a *derivada segundo a normal* tem por valor

$$131)\qquad \frac{\partial m}{\partial n}=\sum_k \cos(x_k, \mathbf{n})\cdot\frac{\partial m}{\partial x_k}.$$

B). **Derivada dum vector.** Seja o vector $\mathbf{r}(P)$. Define-se do mesmo modo *derivada segundo a direcção de* $\mathbf{s}$ pela igualdade

$$132)\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}=\lim_{P_1\to P_0}\frac{\mathbf{r}(P_1)-\mathbf{r}(P_0)}{mod(P_1-P_0)}$$

se êste limite existe quando P_1 tende para P_0 de qualquer maneira, mas sôbre a linha de acção de $\mathbf{s}$. O raciocínio anterior é aplicável e, se o vector $\mathbf{r}(P)$ admite desenvolvimento em fórmula de Taylor, tem-se

$$133)\qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}=\sum_k \cos\alpha_k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}.$$

Definem-se derivadas dirigidas de ordem superior.

18. — **Bibliografia.**

Max Lagally — *Vorlesungen über Vektor-Rechnung*. Leipzig, 1928.
C. E. Weatherburn — *Elementary Vector Analysis*. Londres, 1935.
A. Chatelet e J. Kampé de Fériet — *Calcul Vectoriel*. Paris, 1924.
G. Bouligand — *Leçons de Géométrie Vectorielle*. Paris, 1924.
G. Juvet — *Leçons d'Analyse Vectorielle* (Vol. 1.°). Paris, 1933.
A. Tresse — *Éléments de Géométrie Analytique*. Paris, 1925.
C. Burali-Forti e R. Marcolongo — *Éléments de Calcul Vectoriel* (tradução francesa). Paris, 1910.
R. Garnier — *Cours de Mathématiques Générales* (Vol. 1.°). Paris, 1930.
R. Courant — *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung* (Vol. 2.°). Berlim, 1931.
G. Julia — *Éléments de Géométrie Infinitésimale*. Paris, 1927.

Exercícios

1. — Dados os vectores constantes **a** e **b**, a constante escalar n e o vector $\mathbf{u} = cos\,(n\,.\,t)\,.\,\mathbf{a} + sen\,(n\,.\,t)\,.\,\mathbf{b}$,

a) calcular $\dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} + n^2\mathbf{u}$;

b) verificar que $\mathbf{u} \wedge \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = n\,.\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

2. — Deduzir, das expressões gerais das curvaturas das curvas torsas, as curvaturas das curvas planas.

3. — Calcular as curvaturas da hélice circular recta.

4. — Dada uma curva (C) do espaço, $\mathbf{w} = \mathbf{w}\,(u)$, e um vector constante **a**, escrever a equação da superfície cilíndrica de directriz (C) e geratrizes paralelas a **a** e fazer, sôbre essa superfície, as determinações seguintes:

a) as duas formas quadráticas fundamentais;
b) rede $u = const.$, $v = const.$; ortogonalidade; ângulos de curvas sôbre a superfície;
c) elemento de área;
d) curvatura normal de curvas sôbre a superfície;
e) curvaturas total e média da superfície.

5. — Fazer o estudo indicado no exercício anterior no caso em

que a directriz é a circunferência do plano Oxy de centro na origem e raio r e o vector **a** é o vector unitário do eixo Oz.

Sôbre essa superfície, determinar as curvas que cortam as geratrizes sob um ângulo constante.

6. — Calcular os produtos escalares e vectoriais das derivadas em ordem a **s** dos vectores unitários do triedro de Serret.

Verificar que, quando a flexão e a torsão duma curva são constantes, o vector $\mathbf{h} = \dfrac{d\mathbf{n}}{ds} \wedge \dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ é constante e deduzir daí que a curva é uma hélice circular. (Demonstrar-se há que os eixos do triedro de Serret formam ângulos constantes com o vector constante **h**; o facto de a hélice ser circular deduzir-se há em seguida da constância da flexão).

7. — Provar que tôda a curva cujos raios de torsão e curvatura estão numa razão constante é uma hélice.

(Sendo $\dfrac{\tau}{\rho} = k$, estudar o vector $\mathbf{h} = \mathbf{t} + k \, . \, \mathbf{b}$ e as suas relações direccionais com os eixos do triedro de Serret).

8. — Fazer um estudo análogo ao do exercício n.º 4 sôbre a superfície cónica cuja directriz é uma curva qualquer (C) e cujo vértice é um ponto qualquer fora de (C).

Caso particular — superfície cónica circular recta.

9. — Sejam: O a origem, P o ponto de coordenadas (x_k), $\mathbf{r} = P - O$, $r = mod\,\mathbf{r}$, **t** o vector unitário da direcção **s**.

Verificar que

$$a) \quad \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{t} \mid \mathbf{r}$$

$$b) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{t}.$$

CAPÍTULO IV

TEORIA DOS CAMPOS

I. — OPERADORES DIFERENCIAIS

1\. — **Definições.** A operação de *derivação tensorial*, definida no parágrafo **16** do capítulo **3**, permite definir três *operadores diferenciais* da maior importância na teoria matemática dos campos.

1.º — **Gradiante.** Seja o campo escalar $U(x_1, x_2, x_3)$ onde U é um escalar admitindo derivadas parciais e *invariante* com os sistemas cartesianos rectangulares, isto é, tal que $U(x_1, x_2, x_3) = \overline{U}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$[1]. Um tal escalar é [**2, 7,** conseqüência 2.ª] um *tensor de ordem zero*. A sua derivada tensorial é, portanto, um *vector* de coordenadas $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, $\frac{\partial U}{\partial x_3}$. A êsse vector chama-se *gradiante* do escalar U, e escreve-se

$$1)\qquad grad\,U = \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k .$$

(1) A invariância do escalar função do campo em relação aos sistemas de coordenadas é o caso corrente da Física; evidentemente, a distribuïção de temperaturas dum campo, por exemplo, é independente do sistema de coordenadas a que essa região do espaço esteja porventura referida.

2.º — **Divergência.** Seja o campo vectorial $\mathbf{r}(P) = \sum_k X_k . \mathbf{i}_k$, admitindo derivadas parciais; construamos o seu tensor derivado $t_{i/k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$ e contraiamos êsse tensor; obtém-se [**2**, **11**] o escalar $\sum_k t_{k/k} = \sum_k \frac{\partial X_k}{\partial x_k}$ que se chama *divergência* do vector $\mathbf{r}(P)$ e escreve-se

$$2) \qquad div\, \mathbf{r} = \sum_k \frac{\partial X_k}{\partial x_k}.$$

3.º — **Rotacional.** Seja ainda o campo vectorial $\mathbf{r}(P) = \sum_k X_k . \mathbf{i}_k$ e componhamos o seu derivado tensorial com o tensor E [**2**, 8] saturando dois pares de índices. Obtém-se, é claro, um vector, que se diz *rotação* ou *rotacional* ou *turbilhão* de $\mathbf{r}$ e que se representa por *rot* $\mathbf{r}$ ou (notação usada sobretudo pelos autores inglêses e americanos) *curl* $\mathbf{r}$ [1].

Determinemos a decomposição cartesiana de *rot* $\mathbf{r}$. Por definição, é $rot\, \mathbf{r} = \sum_j y_j . \mathbf{i}_j$ com [**2**, **11**] $y_j = \sum_{ik} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} . e_{ijk}$

$$= e_{1/2} . \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + e_{1/3} . \frac{\partial X_1}{\partial x_3} + e_{2/1} . \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + e_{2/3} . \frac{\partial X_2}{\partial x_3} + e_{3/1} . \frac{\partial X_3}{\partial x_1} + \\ + e_{3/2} . \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\ ^{(2)}.$$

Fazendo $j = 1, 2, 3$ e atendendo aos valores das componentes de E, $e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1$, $e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1$, obtém-se

(1) A palavra *curl* significa *anel*.

(2) Omitindo já, por serem nulos, todos os termos em que figuram dois índices iguais em e_{ijk}.

3) $$rot\,\mathbf{r} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right).\mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right).\mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right).\mathbf{i}_3$$

que pode escrever-se simbòlicamente

4) $$rot\,\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}$$

com a condição de se interpretar o *produto* $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot X_k$ como sendo a *derivada parcial* $\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$.

Do que foi dito em **2, 11** sôbre as composições em que entra o tensor E, resulta que o operador rotacional é *axial*.

Como se vê, os três operadores que acabam de ser definidos actuando sôbre campos *deduzem* dêles outros campos; mais precisamente:

Operador *gradiante* — deduz dum campo escalar um campo vectorial;

Operador *divergência* — deduz dum campo vectorial um campo escalar;

Operador *rotacional* — deduz dum campo vectorial um campo vectorial.

2. — Primeiras propriedades.

A). **Expressões na derivação ordinária.** Os três operadores diferenciais foram definidos a partir da operação de derivação tensorial; relacionam-se, porém, fàcilmente com a derivação ordinária.

Gradiante. — A igualdade **1,** 1) exprime que as coordenadas de *grad* U são as *derivadas ordinárias* (parciais) do escalar U(P).

Divergência. — Seja o vector $\mathbf{r}(P) = \sum_k X_k . \mathbf{i}_k$; tem-se $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_j$ donde $\mathbf{i}_k \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_k}\right.$ logo, em virtude de **1**, 2), é

$$5) \qquad div\,\mathbf{r} = \sum_k \mathbf{i}_k \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right. .$$

Rotacional. — É, anàlogamente,

$$\mathbf{i}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \cdot \mathbf{i}_3 - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \cdot \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_2 \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} = \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \cdot \mathbf{i}_1 - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \cdot \mathbf{i}_3,$$

$\mathbf{i}_3 \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} = \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \cdot \mathbf{i}_2 - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \cdot \mathbf{i}_1$, donde, somando,

$$6) \qquad rot\,\mathbf{r} = \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \cdot$$

B). Linearidade. As igualdades 5) e 6) juntas com **1**, 1) mostram imediatamente que

$$7) \qquad \begin{cases} grad(U_1 + U_2) = grad\,U_1 + grad\,U_2 \\ div(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = div\,\mathbf{r}_1 + div\,\mathbf{r}_2 \\ rot(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = rot\,\mathbf{r}_1 + rot\,\mathbf{r}_2 \end{cases}$$

e que, sendo ρ um escalar *constante* é

$$grad(\rho . U) = \sum_k \frac{\partial(\rho . U)}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k = \sum_k \rho \cdot \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k = \rho . grad\,U,$$

$$div(\rho . \mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{i}_k \left| \frac{\partial(\rho . \mathbf{r})}{\partial x_k} = \sum_k \mathbf{i}_k \right| \rho \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \rho . div\,\mathbf{r}$$

e anàlogamente $rot(\rho . \mathbf{r}) = \rho . rot\,\mathbf{r}$.

Estas três igualdades

$$8) \qquad \begin{cases} grad(\rho . U) = \rho . grad\,U \\ div(\rho . \mathbf{r}) = \rho . div\,\mathbf{r} \\ rot(\rho . \mathbf{r}) = \rho . rot\,\mathbf{r} \end{cases} \qquad \rho = const.$$

juntamente com 7) mostram [**1**, 18, 130)] que *para* $\rho = const.$, os três operadores diferenciais que estamos estudando são *operadores lineares*. As igualdades 8) não subsistem se ρ fôr um escalar função de ponto; introduzem-se outros termos que contêm as derivadas de ρ [**3**, 23); **4**, 26); **5**, 30)] — *a linearidade desaparece portanto quando o multiplicador* ρ *fôr função de* P. Do gradiante pode porém dizer-se, sem restrição, que é um operador linear visto que, quando ρ é função de ponto, o produto $\rho \, . \, U$ é, não o produto do campo por um número, mas sim o produto de *dois* campos.

C) **Invariância.** *Os três operadores diferenciais são invariantes com uma transformação ortogonal dos eixos.*

Seja, com efeito, a transformação ortogonal [**2**, 1, 6)]

$x_j = \sum\limits_k \alpha_{jk} \, . \, \overline{x}_k$, $\mathbf{i}_k = \sum\limits_l \alpha_{kl} \, . \, \overline{\mathbf{i}}_l$; para o escalar invariante U tem-se $U(x_k) = \overline{U}(\overline{x}_k)$, logo é

$$grad\, U = \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k = \sum_k \left(\sum_l \alpha_{kl} \, . \, \overline{\mathbf{i}}_l\right) . \left(\sum_r \frac{\partial \overline{U}}{\partial \overline{x}_r} \cdot \frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_k}\right)$$

$$= \sum_{klr} \alpha_{kl} \cdot \frac{\partial \overline{U}}{\partial \overline{x}_r} \cdot \alpha_{kr} \, . \, \overline{\mathbf{i}}_l \qquad [\mathbf{3}, 11, 63\, a)]$$

$$= \sum_{lr} \frac{\partial \overline{U}}{\partial \overline{x}_r} \cdot \overline{\mathbf{i}}_l \, . \, \delta_{lr} = \sum_r \frac{\partial \overline{U}}{\partial \overline{x}_r} \cdot \overline{\mathbf{i}}_r$$

o que prova a invariância de *grad* U.

A demonstração é análoga para os outros dois operadores; façamos, por exemplo, a verificação para o *rotacional*, não havendo mais que trocar o sinal do produto externo em interno para ter a *divergência*.

$$rot\, \mathbf{r} = \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \sum_k \left(\sum_l \alpha_{kl} \, . \, \overline{\mathbf{i}}_l\right) \wedge \left(\sum_s \alpha_{ks} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{x}_s}\right) [\mathbf{3}, 11, 64a)]$$

$$= \sum_{ls} \left(\sum_k \alpha_{kl} \, . \, \alpha_{ks}\right) \cdot \left(\overline{\mathbf{i}}_l \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{x}_s}\right) = \sum_{ls} \delta_{ls} \, . \, \overline{\mathbf{i}}_l \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{x}_s}$$

$$= \sum_s \overline{\mathbf{i}}_s \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \overline{x}_s} \, .$$

Adiante [9] se verá que a invariância dêstes operadores diz respeito, não apenas a sistemas ortogonais, mas a quaisquer sistemas de coordenadas.

D). **O vector simbólico** ∇ *(nabla)*. Os três operadores diferenciais podem exprimir-se muito simplesmente num operador *simbólico*, introduzido por *Hamilton*, o vector simbólico ∇, que se lê *nabla*, definido pela igualdade

$$9)\qquad \nabla=\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{i}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{i}_3.$$

Por convenção, êste operador simbólico, *de carácter vectorial*, pode ser aplicado a um escalar ou a um vector e está sujeito às regras ordinárias da álgebra vectorial, estudadas no capítulo I.

Assim, dado um escalar $U(P)$, o produto ∇U, que se lê *nabla* U ou *del* U, interpreta-se conforme a igualdade

$$\nabla U=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{i}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{i}_3\right)\cdot U$$

$$=\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\mathbf{i}_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}\cdot\mathbf{i}_2+\frac{\partial U}{\partial x_3}\cdot\mathbf{i}_3,\qquad \text{isto é,}$$

$$10)\qquad \nabla U=grad\,U.$$

Anàlogamente, tem-se

$$11)\qquad \nabla\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{i}_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}\cdot\mathbf{i}_2+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_3}\cdot\mathbf{i}_3$$

entidade que não é, manifestamente, nem um vector nem um escalar.

O jôgo das regras da álgebra vectorial permite exprimir $div\,\mathbf{r}$ e $rot\,\mathbf{r}$; efectivamente

$$\nabla|\mathbf{r}=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{i}_k\Big|\sum_k X_k.\mathbf{i}_k=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}X_k\quad \text{logo, simbòlicamente}$$

$$12)\qquad \nabla|\mathbf{r}=div\,\mathbf{r}.$$

Anàlogamente se encontra

$$13)\qquad \nabla\wedge\mathbf{r}=rot\,\mathbf{r}$$

que coincide com a igualdade simbólica 1, 4).

As fórmulas 10) 12) e 13) permitem o estabelecimento rápido de certas relações entre os operadores diferenciais; o seu uso requere, porém, uma atenção cuidadosa na consideração daqueles termos sôbre os quais incide o símbolo ∇.

As *derivadas dirigidas* exprimem-se também fàcilmente no operador ∇. Efectivamente, chamando **t** ao vector unitário de coordenadas $\cos\alpha_k$, $k=1,2,3$, a igualdade **3, 17**, 130) que dá a derivada do escalar U segundo a linha de acção de **s**, de vector unitário **t**, escreve-se

$$14) \qquad \frac{\partial U}{\partial s} = \mathbf{t} \,|\, grad\, U = \mathbf{t} \,|\, \nabla U.$$

Se essa linha de acção é normal à superfície de nível que passa pelo ponto considerado, tem-se, chamando **n** ao vector unitário da normal a essa superfície, $\mathbf{n} = \sum_k \cos(x_k, \mathbf{n}) \,.\, \mathbf{i}_k$ donde

$$15) \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = \mathbf{n} \,|\, grad\, U = \mathbf{n} \,|\, \nabla U.$$

Do mesmo modo, a derivada dirigida dum vector pode escrever-se [**3, 17**, 133)]

$$16) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{t} \,|\, \nabla \mathbf{r}.$$

Se **s** é o vector de que **t** é o vector unitário, tem-se, fazendo $s = mod\, \mathbf{s}$,

$$16\,a) \qquad s \, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{s} \,|\, \nabla \mathbf{r}.$$

Passamos agora a estudar mais minuciosamente cada um dos operadores.

3. — O operador gradiante.

A). Interpretação geométrica. Seja o campo escalar contínuo U(P); consideremos (fig. 53) dois pontos vizinhos P e P_1 do campo e as superfícies de nível [**3, 1**] que passam pelos pontos P e P_1.

Façamos $P_1 - P = \overrightarrow{dP}$ e sejam U e $U + dU$ os valores da função do campo nas superfícies de nível vizinhas; tem-se, no sistema cartesiano rectangular Ox_1, x_2, x_3, $\overrightarrow{dP} = \sum_k dx_k . \mathbf{i}_k$ e $dU = \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot dx_k$ donde [**1**, 1) e **1**, **13**, 94)]

$$17) \qquad dU = grad\, U \,|\, \overrightarrow{dP}$$

relação que é válida qualquer que seja a direcção do deslocamento infinitésimo determinado pelo vector $\overrightarrow{dP}$. A significação desta igualdade completa-se com a seguinte propriedade — *se existe um vector* **u** *tal que, para qualquer deslocamento infinitésimo* $\overrightarrow{dP}$ *do campo, se tenha* $dU = \mathbf{u} \,|\, \overrightarrow{dP}$, *é necessàriamente* $\mathbf{u} = grad\, U$. Com efeito, da igualdade $grad\, U \,|\, \overrightarrow{dP} = \mathbf{u} \,|\, \overrightarrow{dP}$, verificada para $\overrightarrow{dP}$ qualquer, resulta [**1**, **13**, 6.ª] $\mathbf{u} = grad\, U$.

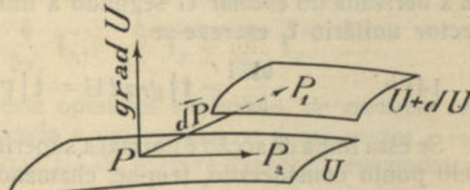


Fig. 55

Suponhamos que o ponto vizinho de P, $P_2 = P + \overrightarrow{dP}$ está sôbre a própria superfície de nível que passa por P e, sôbre ela, numa direcção qualquer; a relação 17) mantém-se e como é, neste caso, $dU = 0$, tem-se que o *vector grad* U (P) *é normal à superfície de nível que passa pelo ponto* P.

Determinemos o sentido de *grad* U; para isso, voltemos a considerar o ponto P_1 sôbre a superfície de nível correspondente a $U + dU$ e suponhamos $dU > 0$; a igualdade 17) dá então $gradU \,|\, \overrightarrow{dP} > 0$ que mostra que o ângulo dos vectores *grad*U e $\overrightarrow{dP}$ é agudo, isto é, que *o vector grad*U *está dirigido no sentido em que o valor da função do campo aumenta.*

Estas propriedades permitem precisar o que no parágrafo anterior se disse quanto às relações de *grad* U com a derivada dirigida do escalar U. Seja a superfície de nível que passa por P e **n** o vector unitário normal a essa superfície. Como *grad* U tem a direcção de **n**, a igualdade [2, 15)] $\frac{\partial U}{\partial n} = grad\, U | \mathbf{n}$

mostra que

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \pm\, mod\, grad\, U = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2}$$

(devendo tomar-se o sinal + ou o sinal — conforme **n** e *grad* U tiverem o mesmo sentido ou o contrário) e ainda que

$$18) \qquad \frac{\partial U}{\partial n} \cdot \mathbf{n} = grad\, U.$$

B). **Potencial.** Seja o campo vectorial **r** (P). Se existe uma função U (P) contínua, *uniforme* e derivável tal que, para todo o ponto P do campo se tenha

$$19) \qquad \mathbf{r} = -\, grad\, U$$

diz-se que o campo **r** (P) *deriva do potencial* U (P) ou que o campo **r** (P) *tem potencial*. À função U (P) dá-se então o nome de *potencial-escalar* do campo.

C). **Propriedades do gradiante.** Além das propriedades já assinaladas no parágrafo 2, convém mencionar mais as seguintes:

1.ª — *Se* $U(P) = const.$ *é* $grad\, U = 0$. Resulta imediatamente da definição [1, 1)].

2.ª — *Se* $U_1, U_2, \cdots U_n$ *são escalares funções do ponto* $P(x_1, x_2, x_3)$, *admitindo derivadas parciais, e se* $f(U_1, U_2, \cdots U_n)$ *é uma função escalar admitindo derivadas parciais contínuas em relação a* $U_1, \cdots U_n$, *tem-se*

$$20) \qquad grad\, f(U_1, \cdots U_n) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial U_k} \cdot grad\, U_k.$$

Com efeito, $grad\, f = \sum_l \frac{\partial f}{\partial x_l} \cdot \mathbf{i}_l = \sum_l \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial U_k} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) \cdot \mathbf{i}_l =$
$= \sum_k \frac{\partial f}{\partial U_k} \left(\sum_l \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \cdot \mathbf{i}_l \right)$ [1].

Casos particulares. a). Se $f(U_1, \cdots U_n) = U_1 + \cdots + U_n$, tem-se $\frac{\partial f}{\partial U_k} = 1$, donde

21) $$grad \sum_k U_k = \sum_k grad U_k .$$

b). Se $f(U_1, \cdots U_n) = \sum_i \rho_i . U_i$, sendo ρ_i escalares constantes, é $\frac{\partial f}{\partial U_i} = \rho_i$, donde

22) $$grad \sum_i \rho_i . U_i = \sum_i \rho_i . grad U_i$$

c). Se $f = \rho . U$, com ρ função de ponto, é $\frac{\partial f}{\partial U} = \rho$, $\frac{\partial f}{\partial \rho} = U$, logo

23) $$grad(\rho . U) = \rho . grad U + U . grad \rho$$

igualdade que completa a primeira de 2, 8).

3.ª — É

24) $$grad(\mathbf{r} | \mathbf{s}) = \mathbf{r} \wedge rot\, \mathbf{s} + \mathbf{s} \wedge rot\, \mathbf{r} + \mathbf{r} | \nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} | \nabla \mathbf{r} .$$

Com efeito, $grad(\mathbf{r} | \mathbf{s}) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r} | \mathbf{s}) . \mathbf{i}_k = \sum_k \mathbf{i}_k . \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} | \mathbf{s} \right) +$
$+ \sum_k \mathbf{i}_k . \left(\mathbf{r} | \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k} \right) .$

---

(1) A demonstração vale, evidentemente, nas condições, menos restritivas que a continuidade das derivadas parciais, sob as quais é válida a regra de derivação da função composta (ver qualquer tratado de Análise).

Ora, $\mathbf{r} \wedge \left(\mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\right) = \left(\mathbf{r} \,|\, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\right) \cdot \mathbf{i}_k - (\mathbf{r} \,|\, \mathbf{i}_k) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}$ donde

$\left(\mathbf{r} \,|\, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\right) \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{r} \wedge \left(\mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\right) + a_k \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}$ e anàlogamente

$$\left(\mathbf{s} \,|\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right) \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{s} \wedge \left(\mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right) + b_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}.$$

Fazendo os somatórios em k e adicionando, vem [2, 6)]

$$grad\,(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{s}) = \mathbf{r} \wedge rot\,\mathbf{s} + \mathbf{s} \wedge rot\,\mathbf{r} + \sum_k a_k \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k} + \sum_k b_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}$$

donde, por 2, 11) se deduz 24).

Esta igualdade pode escrever-se doutra maneira que põe em evidência as derivadas dirigidas dos vectores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$; com efeito, de 2, 16 *a*) resulta, fazendo $mod\,\mathbf{r} = r$, $mod\,\mathbf{s} = s$,

$$24\,a) \quad grad\,(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{s}) = \mathbf{r} \wedge rot\,\mathbf{s} + \mathbf{s} \wedge rot\,\mathbf{r} + r \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} + s \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}.$$

4.ª — Gradiante da distância. Seja O a origem dos eixos e $P(x_k)$ um ponto variável; consideremos o vector $\mathbf{r} = P - O = \sum_k x_k . \mathbf{i}_k$ e façamos $r = mod\,\mathbf{r}$. É

$$25) \qquad grad\,r = \frac{P - O}{r}$$

igualdade que exprime que *o gradiante da distância dum ponto variável* P *à origem é igual ao vector unitário do vector* $P - O = \mathbf{r}$.

Efectivamente, da igualdade $r^2 = \sum_k x_k^2$ tira-se, diferenciando, $r . dr = \sum_k x_k . dx_k$ donde $dr = \sum_k \frac{x_k}{r} \cdot dx_k = \left(\sum_k \frac{x_k}{r} \cdot \mathbf{i}_k\right) \,|\, dP$

logo, por 17) é $grad\,r = \sum_k \frac{x_k}{r} \cdot \mathbf{i}_k = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}$.

A igualdade 25) vale ainda, como imediatamente se verifica, quando O é, não a origem, mas um ponto fixo qualquer de coordenadas (α_k), constantes.

4. — O operador divergência.

A). **Vector e campo solenoidais.** Seja o campo vectorial, admitindo derivadas parciais, $\mathbf{r}(P)$; o campo escalar dêle deduzido pelo operador divergência, diz-se *solenoidal* quando em todos os pontos do campo fôr $div\,\mathbf{r} = 0$; $\mathbf{r}$ diz-se então, também, um *vector solenoidal*. Para designar um campo solenoidal usa-se também a expressão *campo sem fonte* (Quellenfrei); a razão dêste nome será vista adiante [9], quando se tratar da significação física da divergência.

B). **Propriedades.** Além das que fôram vistas no parágrafo 2, mencionaremos as seguintes:

1.ª — *Se* $\mathbf{a}$ *é um vector constante, é* $div\,\mathbf{a} = 0$; efectivamente, nessa hipótese é $\dfrac{\partial X_k}{\partial x_k} = 0$.

2.ª — *Se* ρ *e* $\mathbf{r}$ *são um escalar e um vector funções de ponto, tem-se*

$$26) \qquad div(\rho\,.\,\mathbf{r}) = \rho\,.\,div\,\mathbf{r} + grad\,\rho \,|\, \mathbf{r}\,.$$

Com efeito, de 2, 5) tem-se $div(\rho\,.\,\mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{i}_k \,|\, \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho\,.\,\mathbf{r}) =$

$$= \rho\,.\sum_k \mathbf{i}_k \,|\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} + \sum_k \mathbf{i}_k \,|\, \mathbf{r}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \rho\,.\,div\,\mathbf{r} + \mathbf{r}\,|\sum_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}\cdot \mathbf{i}_k\,.$$

Esta propriedade completa a significação da segunda igualdade de 2, 8).

3.ª — *É*

$$27) \qquad div(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = \mathbf{s}\,|\,rot\,\mathbf{r} - \mathbf{r}\,|\,rot\,\mathbf{s}\,.$$

Com efeito, de 2, 5) e das propriedades do produto mixto deduz-se que

$$div(\mathbf{r}\wedge\mathbf{s}) = \sum_k \mathbf{i}_k \,|\, \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{r}\wedge\mathbf{s}) = \sum_k \mathbf{i}_k \,|\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\wedge\mathbf{s} - \sum_k \mathbf{i}_k \,|\, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\wedge\mathbf{r}$$

$$= \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\,|\,\mathbf{s} - \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\,|\,\mathbf{r}\,.$$

4.ª — *Se* $O(\alpha_k)$ *é um ponto fixo e* $P(x_k)$ *um ponto variável, é*

28) $$div(P-O)=3.$$

Efectivamente,

$$P-O=\sum_k (x_k-\alpha_k)\,.\,\mathbf{i}_k \quad \text{donde} \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_k}=\frac{\partial(x_k-\alpha_k)}{\partial x_k}=1.$$

5. — O operador rotacional.

A). **Campo irrotacional.** Seja o campo vectorial, derivável, $\mathbf{r}(P)$ e seja $\mathbf{u}(P)$ o campo vectorial que dêle se deduz pela aplicação do operador rotacional, $\mathbf{u}(P)=rot\,\mathbf{r}$; êste novo campo diz-se *irrotacional* ou *lamelar* em tôda a região em que $rot\,\mathbf{r}=0$. A razão do nome *lamelar* será vista adiante [6, B), 2.ª]. Como ao rotacional se dá também o nome de *turbilhão,* um campo irrotacional diz-se também *sem turbilhão* (Wirbelfrei).

B). **Significação física do operador rotacional.** Demonstra-se, em cinemática do corpo sólido, que, dado um corpo animado dum movimento de rotação em tôrno dum eixo passando por O, com velocidade angular igual ao módulo do vector $\mathbf{w}=\sum_k a_k\,.\,\mathbf{i}_k$, o vector velocidade dum ponto P do côrpo é

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\wedge(P-O).$$

Calculemos o rotacional de $\mathbf{v}$; para isso, tomemos O como origem e sejam (x_k) as coordenadas de P; é $P-O=\sum_k x_k\,.\,\mathbf{i}_k$

$$\text{e } \mathbf{w}\wedge(P-O)=\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}=\rho_1\,.\,\mathbf{i}_1+\rho_2\,.\,\mathbf{i}_2+\rho_3\,.\,\mathbf{i}_3.$$

Por 1, 4) tem-se

$$rot\,\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \end{vmatrix}=2\,.\,(a_1\,.\,\mathbf{i}_1+a_2\,.\,\mathbf{i}_2+a_3\,.\,\mathbf{i}_3).$$

É, portanto,

29) $$rot\,\mathbf{v} = 2\,\mathbf{w}.$$

C). **Propriedades.** Além das já vistas, têm-se mais as seguintes:

1.ª — *Se* **a** *é um vector constante, é* $rot\,\mathbf{a} = 0$. Resulta imediatamente da definição.

2.ª — *Sendo* ρ e **r** *um escalar e um vector funções de ponto, tem-se*

30) $$rot(\rho.\mathbf{r}) = \rho.rot\,\mathbf{r} + grad\,\rho \wedge \mathbf{r}.$$

Dedução análoga à de **4**, 26).

Esta propriedade mostra que o operador rotacional não é, *em geral*, um operador linear e completa a significação da terceira igualdade de **2**, 8).

3.ª — *É*

31) $$rot(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = \mathbf{r}.div\,\mathbf{s} - \mathbf{s}.div\,\mathbf{r} + \mathbf{s}|\nabla\mathbf{r} - \mathbf{r}|\nabla\mathbf{s}.$$

Com efeito, por **2**, 6) e pelas propriedades do duplo produto vectorial [**I**, 16, 124)] tem-se $[\mathbf{r} = \sum_k a_k.\mathbf{i}_k,\ \mathbf{s} = \sum_k b_k.\mathbf{i}_k]$:

$$rot(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \wedge \mathbf{s}\right) +$$
$$+ \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \left(\mathbf{r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\right) = \sum_k (\mathbf{i}_k|\mathbf{s}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} - \sum_k \left(\mathbf{i}_k \Big| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right) \cdot \mathbf{s}$$
$$+ \sum_k \left(\mathbf{i}_k \Big| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}\right) \cdot \mathbf{r} - \sum_k (\mathbf{i}_k|\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k} = \sum_k b_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} - \mathbf{s}.div\,\mathbf{r}$$
$$+ \mathbf{r}.div\,\mathbf{s} - \sum_k a_k \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k}$$

donde imediatamente se tira 31).

Os dois últimos termos de 31) podem substituir-se pelas derivadas dirigidas; tem-se [**2**, 16 *a*)]

31 *a*) $$rot(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = \mathbf{r}.div\,\mathbf{s} - \mathbf{s}.div\,\mathbf{r} + s \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} - r \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r}.$$

4.ª — *Sejam* $\overrightarrow{dP}$ e $\overrightarrow{\delta P}$ *dois deslocamentos infinitésimos do ponto* P, $\overrightarrow{dP} = \sum_k dx_k . \mathbf{i}_k$, $\overrightarrow{\delta P} = \sum_k \delta x_k . \mathbf{i}_k$, *e* $d\mathbf{r}$ *e* $\delta\mathbf{r}$ *as diferenciais correspondentes :*

$$d\mathbf{r} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \cdot dx_k, \quad \delta\mathbf{r} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \cdot \delta x_k; \qquad \text{tem-se}$$

$$32) \qquad rot\,\mathbf{r} \,|\, \overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{\delta P} = d\mathbf{r} \,|\, \overrightarrow{\delta P} - \delta\mathbf{r} \,|\, \overrightarrow{dP}.$$

Com efeito, [2, 6) e 1, 17, 126)]

$$rot\,\mathbf{r} \,|\, \overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{\delta P} = \sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \,|\, \overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{\delta P} = \sum_k \begin{vmatrix} \mathbf{i}_k \,|\, \overrightarrow{dP} & \mathbf{i}_k \,|\, \overrightarrow{\delta P} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \,|\, \overrightarrow{dP} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \,|\, \overrightarrow{\delta P} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_k \begin{vmatrix} dx_k & \delta x_k \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \,|\, \overrightarrow{dP} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \,|\, \overrightarrow{\delta P} \end{vmatrix} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \cdot dx_k \,|\, \overrightarrow{\delta P} - \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \cdot \delta x_k \,|\, \overrightarrow{dP}.$$

A estas propriedades pode ainda juntar-se a seguinte, que relaciona o rotacional com a divergência e o gradiante.

5.ª — *Se* $\mathbf{u}$ *é um vector constante unitário e* $\mathbf{r}$ *outro vector, qualquer, é*

$$33) \qquad div\,\mathbf{r} = [grad(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{u}) - rot(\mathbf{r} \wedge \mathbf{u})] \,|\, \mathbf{u}.$$

Tem-se, efectivamente, por 3, 24) e notando que $\mathbf{u}$ é constante, $grad(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \wedge rot\,\mathbf{r} + \mathbf{u} \,|\, \nabla\,\mathbf{r}$, donde $grad(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{u}) \,|\, \mathbf{u} = (\mathbf{u} \,|\, \nabla\,\mathbf{r}) \,|\, \mathbf{u}$; por outro lado, [31)] $rot(\mathbf{r} \wedge \mathbf{u}) = -\mathbf{u}.div\,\mathbf{r} + \mathbf{u} \,|\, \nabla\,\mathbf{r}$, donde $rot(\mathbf{r} \wedge \mathbf{u}) \,|\, \mathbf{u} = -div\,\mathbf{r} + (\mathbf{u} \,|\, \nabla\,\mathbf{r}) \,|\, \mathbf{u}$; subtraindo ordenadamente obtém-se 33).

6.ª — *Se* O *é um ponto fixo de coordenadas* (α_k) *e* P *um ponto variável de coordenadas* (x_k), *variáveis independentes, é*

$$34) \qquad rot(P - O) = 0.$$

Com efeito, de $P - O = \sum_k (x_k - \alpha_k) \,.\, \mathbf{i}_k$ resulta

$$rot(P-O) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 - \alpha_1 & x_2 - \alpha_2 & x_3 - \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. — **Operadores duplos.** Dá-se o nome de *operadores diferenciais duplos* àqueles que se obtêm aplicando sucessivamente a um dado campo, dois dos três operadores atraz estudados, por exemplo: *rot grad*. É claro que não são possíveis todos os $3^2 = 9$ operadores duplos, pois, pela própria natureza dos operadores simples, carecem de significado: *grad grad, grad rot, div div, rot div*. Há portanto, de facto, *cinco* operadores duplos — *div grad, rot grad, div rot, grad div, rot rot* — que vamos estudar sumàriamente.

A iteração de operadores pode prosseguir; na 3.ª ordem há $3^3 = 27$ arranjos triplos, mas o número de operadores triplos efectivos é, como é óbvio, muito menor.

A). **Operador div grad. Laplaciano.** Seja o campo escalar, admitindo derivadas até à 2.ª ordem, U(P).

Como $grad\, U = \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k$, tem-se [1, 2)]

$$div\, grad\, U = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}.$$

Laplaciano. Dado o escalar U(P), chama-se *laplaciano* dêsse escalar, e escreve-se ΔU ou *Lap* U, à função

35) $$Lap\, U = div\, grad\, U = \sum_k \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}.$$

Simbòlicamente, escreve-se [2, 10) e 12)]

36) $$\Delta U = \nabla | \nabla U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) U \rightarrow \Delta = \nabla | \nabla.$$

Por analogia com o laplaciano dum escalar, define-se ainda laplaciano dum vector pela igualdade

$$37)\qquad Lap\,\mathbf{r} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k^2}$$

mas a analogia dos dois operadores $Lap\,U$ e $Lap\,\mathbf{r}$ é apenas formal e *em face da expressão cartesiana*, visto que $divgrad\,\mathbf{r}$ não tem significado; a significação vectorial de $Lap\,\mathbf{r}$ será vista adiante [D)].

Função harmónica. A tôda a função de ponto $U(P)$, definida num domínio E, que, em todo o ponto dêsse domínio, satisfaz à equação

$$38)\qquad Lap\,U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

denominada *equação de Laplace*, dá-se o nome de função harmónica nesse domínio [1].

Propriedades do laplaciano dum escalar.

1.ª — *Se* $\rho = const.$ *é*

$$39)\qquad Lap\,\rho = 0\,.$$

É conseqüência imediata da definição.

2.ª — *Sejam* $U_1, \cdots U_n$ *escalares funções de ponto, deriváveis até à 2.ª ordem, e* $F(U_1, \cdots U_n)$ *uma função escalar*

---

(1) Alguns autores (V. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, tomo III, pg. 242) definem função harmónica como aquela que, além de satisfazer à equação $Lap U = 0$, é ainda *regular* em E. Uma função $U(x, y, z)$ diz-se regular num domínio E quando:

a) U e as suas derivadas parciais de 1.ª ordem $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}$ são contínuas em todo o ponto de E e da sua fronteira;

b) as derivadas parciais de 2.ª ordem $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ são contínuas em todo o ponto de E e *finitas* (porventura descontínuas) sôbre a fronteira.

derivável também até à 2.ª ordem; tem-se

40) $$LapF = \sum_k \frac{\partial F}{\partial U_k} \cdot Lap U_k + \sum_{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial U_k \partial U_l} \cdot grad U_k | grad U_l .$$

Com efeito, é

$$LapF = div grad F(U_1, \cdots U_n) = div \left(\sum_k \frac{\partial F}{\partial U_k} \cdot grad U_k \right) \quad [3, 20)]$$

$$= \sum_k div \left(\frac{\partial F}{\partial U_k} \cdot grad U_k \right) \quad [2, 7)]$$

$$= \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial U_k} \cdot div grad U_k + grad \frac{\partial F}{\partial U_k} | grad U_k \right] \quad [4, 26)]$$

donde, por 3, 20) se tem 40).

Casos particulares.

a). Seja $F = U_1 + \cdots + U_n$; tem-se $\frac{\partial F}{\partial U_k} = 1, \frac{\partial^2 F}{\partial U_k \partial U_l} = 0$, logo

41) $$Lap \sum_k U_k = \sum_k Lap U_k .$$

b). Seja $F = \rho . U$, $\rho = const$; tem-se $\frac{\partial F}{\partial U} = \rho, \frac{\partial F}{\partial \rho} = U$, $Lap \rho = 0$, $grad \rho = 0$, logo

42) $$Lap(\rho . U) = \rho . Lap U .$$

c). Seja $F = U . V$, com U e V funções de ponto independentes uma da outra. É, então, $\frac{\partial F}{\partial U} = V, \frac{\partial F}{\partial V} = U$, $\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial V_2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial V} = 1$, logo

43) $$Lap(U.V) = U.Lap V + V.Lap U + 2 grad U | grad V .$$

As igualdades 41), 42) e 43) mostram que, em relação à linearidade, o operador *Lap* U se comporta como o operador gradiante.

d). Seja $F = f(U)$. Tem-se imediatamente, de 40),

44) $Lap\, f(U) = f'(U) \,.\, Lap\, U + f''(U) \,.\, grad\, U \,|\, grad\, U$.

Deduziam-se, com igual simplicidade, as expressões de $Lap \dfrac{U}{V}$, $Lap\, U^k$, ...

3.ª — *Sejam: O a origem dos eixos, P o ponto de coordenadas* (x_k), $\mathbf{r} = P - O = \sum_k x_k \,.\, \mathbf{i}_k$ *e* $r = mod\, \mathbf{r}$. *A função* $\dfrac{1}{r}$ *é harmónica em todo o domínio finito que não contenha* O.

Com efeito:

a) Na origem a função $f(r) = \dfrac{1}{r}$ é descontínua, logo não é harmónica num domínio que contenha O.

b) Em todo o ponto diferente de O tem-se, em virtude de 44), $Lap \dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^2} \cdot Lap\, r + \dfrac{2}{r^3} grad\, r \,|\, grad\, r$. Ora [3,25)] $grad\, r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ logo, pelas propriedades da divergência e do gradiante, $Lap\, r = div\, grad\, r = div\left(\dfrac{1}{r} \cdot \mathbf{r}\right) = \dfrac{1}{r} \cdot div\, \mathbf{r} +$

$$+ grad \frac{1}{r} \,|\, \mathbf{r} = \frac{1}{r} \cdot div\, \mathbf{r} - \frac{1}{r^2} \cdot grad\, r \,|\, \mathbf{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} \,|\, \mathbf{r} = \frac{2}{r};$$

é portanto $Lap \dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{2}{r} + \dfrac{2}{r^3} \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \mathbf{r} \,|\, \mathbf{r} = 0$ o que prova que $\dfrac{1}{r}$ é harmónica.

A propriedade mantém-se, como fàcilmente se verifica, se O é um ponto fixo qualquer de coordenadas (α_k) — a função $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{mod(P - O)}$ é harmónica em todo o domínio finito que não contenha $O(\alpha_k)$. Mais, num tal domínio, não só a função como as suas derivadas parciais até à 2.ª ordem são contínuas; pode portanto dizer-se que *a função* $\frac{1}{r}$ *é harmónica e regular*[1] *em todo o domínio finito que não contenha o ponto* $O(\alpha_k)$.

B). **Operador rot grad.** *Propriedades.*

1.ª — *A função rot grad* U *é identicamente nula:*

$$45) \qquad rot\, grad\, U \equiv 0.$$

Seja, com efeito, a função escalar $U = U(x_k)$; como

$$[1,1)] \quad grad\, U = \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k \quad \text{é } 1,4)]$$

$$rot\, grad\, U = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{\partial U}{\partial x_2} & \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

se a função $U(x_k)$ é tal que valha para ela o teorema da independência da ordem da derivação.

Suponhamos que a função $U(x_k)$ é *uniforme;* então, o campo vectorial $\mathbf{r} = grad\, U$ deriva do potencial $-U$ [3, B)] logo, esta propriedade significa que *todo o campo vectorial com potencial é um campo irrotacional* [5, A)].

2.ª — *Reciprocamente, sempre que* $rot\, \mathbf{r} = 0$, *o vector* **r** *pode ser considerado como o gradiante dum escalar.*

Seja, com efeito, $\mathbf{r} = \sum_k X_k(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathbf{i}_k$ e $rot\, \mathbf{r} = 0;$

daqui resulta que [1, 3)]

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0.$$

---

(1) Sôbre as definições de função harmónica e de função regular, ver a nota de pg. 219.

Ora, se as funções X_k são contínuas, bem como as suas derivadas parciais (hipótese que supomos verificada) estas condições são necessárias e suficientes para que exista uma função $U(x_k)$ tal que $\sum_k X_k \,.\, dx_k = dU$ (ver, para a demonstração, qualquer tratado de Análise, por exemplo J. Hadamard, *Cours d'Analyse*, tomo I, pg. 229 e seg.). Mas para o escalar U, função do ponto $P(x_k)$, verifica-se a relação [3, 17)]

$dU = grad\, U \,|\, d\vec{P}$ com $d\vec{P} = \sum_k dx_k \,.\, \mathbf{i}_k$, e esta relação, junta com $dU = \sum_k X_k \,.\, dx_k = \mathbf{r} \,|\, d\vec{P}$, dá, por ser $d\vec{P}$ qualquer, $\mathbf{r} = grad\, U$ [3, A)].

Se a função $U(x_k)$ é uniforme, o campo vectorial $\mathbf{r} = grad\, U$ deriva dum potencial; o campo pode portanto ser irrotacional sem que derive dum potencial: é necessário juntar a *uniformidade* da função U. Quando isso se dá, a $\mathbf{r}$ chama-se *vector potencial* e a $-U$ *potencial-escalar.*

Esta propriedade justifica o nome de *lamelar* dado também ao campo irrotacional. Efectivamente, se $rot\, \mathbf{r} = 0$, é, como se viu, $\mathbf{r} = grad\, U$ e o campo escalar $U(P)$ é dividido pela família de superfícies de nível $U = const.$ (superfícies que, pela sua própria definição, se não cortam, na hipótese da uniformidade) em *camadas* ou *lamelas*.

C). **Operador div rot.** *Propriedades*:

1.ª — A função $div\, rot\, \mathbf{r}$ é identicamente nula:

46) $$div\, rot\, \mathbf{r} \equiv 0 .$$

Seja, com efeito, $\mathbf{r} = \sum_k X_k . \mathbf{i}_k$; tem-se

$$rot\, \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{donde } div\, rot\, \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) \equiv 0$$

se, como supomos, vale para as funções X_k o teorema da independência da ordem de derivação. Simbòlicamente, tem-se

$$46\ a)\quad div\, rot\, \mathbf{r} = \nabla | \nabla \wedge \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} \equiv 0 .$$

Mostra esta propriedade que, sob as condições analíticas supostas, *todo o campo vectorial* $\mathbf{u}(P)$ *cujo vector é rotacional de outro* $(\mathbf{u} = rot\, \mathbf{r})$ *é solenoidal* $(div\, \mathbf{u} = 0)$.

2.ª — Recìprocamente, *em todo o campo* $\mathbf{u}(P)$ *solenoidal* $(div\, \mathbf{u} = 0)$ *pode determinar-se um vector* $\mathbf{r}$ *tal que* $\mathbf{u} = rot\, \mathbf{r}$.

Seja $\mathbf{u} = \sum_k X_k . \mathbf{i}_k$ e $div\, \mathbf{u} = \sum_k \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = 0$. A possibilidade de existência dum vector $\mathbf{r}$ tal que $rot\, \mathbf{r} = \mathbf{u}$ está condicionada pela possibilidade de determinar três funções $R_k(P)$ tais que

$$\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3} = X_1, \quad \frac{\partial R_1}{\partial x_3} - \frac{\partial R_3}{\partial x_1} = X_2, \quad \frac{\partial R_2}{\partial x_1} - \frac{\partial R_1}{\partial x_2} = X_3$$

$$\text{com} \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} = 0 .$$

Ora, demonstra-se (ver, por exemplo, J. Hadamard, *Cours d'Analyse*, tomo I, pg. 488 e seg.) que é possível de facto determinar as três funções $R_k(P)$ satisfazendo a estas condições e que existe portanto um vector $\mathbf{r} = \sum_k R_k \,.\, \mathbf{i}_k$ tal que $rot\, \mathbf{r} = \mathbf{u}$ e $div\, \mathbf{u} = 0$.

Diz-se, neste caso, que o vector $\mathbf{u}$ deriva do *potencial-vector* $\mathbf{r}$ ou, ainda, que $\mathbf{r}$ é o *potencial-vector* do vector solenoidal $\mathbf{u}$.

É claro que não existe um potencial-vector *único* de $\mathbf{u}$; a sua soma com o gradiante dum escalar $U(P)$ é também potencial-vector de $\mathbf{u}$; com efeito, $rot(\mathbf{r} + grad U) = rot\, \mathbf{r} = \mathbf{u}$ [45)].

Como a função $U(P)$ é arbitrária, pode escolher-se de modo que o campo $\mathbf{r} + grad\, U$ seja, por sua vez, solenoidal; é preciso, e basta, para isso, que $div(\mathbf{r} + grad\, U) = div\, \mathbf{r} + Lap\, U = 0$, isto é, que a função $U(P)$ satisfaça à equação às derivadas parciais $div\, \mathbf{r} = - Lap\, U$; mas do estudo desta equação não nos ocuparemos aqui.

D). **Operadores grad div e rot rot.** Limitar-nos hemos a deduzir a seguinte relação que liga estes dois operadores:

47) $$rot\, rot\, \mathbf{r} = grad\, div\, \mathbf{r} - Lap\, \mathbf{r}.$$

Com efeito, seja $\mathbf{r} = \sum_k X_k \,.\, \mathbf{i}_k$; tem-se [2, 6)]

$$rot\, rot\, \mathbf{r} = rot\left(\sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right) = \sum_l \mathbf{i}_l \wedge \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_k \mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right)$$

$$= \sum_{kl} \mathbf{i}_l \wedge \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k}\right) = \sum_{kl} \mathbf{i}_l \wedge \left(\mathbf{i}_k \wedge \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_l}\right)$$

$$= \sum_{kl}\left(\mathbf{i}_l \,\middle|\, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_l}\right) \cdot \mathbf{i}_k - \sum_{kl}(\mathbf{i}_l \,|\, \mathbf{i}_k) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_l}$$

$$= \sum_{kl} \frac{\partial^2 X_l}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \mathbf{i}_k - \sum_{kl} \delta_{lk} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_l}$$

$$= \sum_{kl} \frac{\partial^2 X_l}{\partial x_k \partial x_l} \cdot \mathbf{i}_k - \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k^2};$$

ora, por 37) é $\sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k^2} = Lap\,\mathbf{r}$ e, por outro lado, é

$$grad\,div\,\mathbf{r} = grad\left(\sum_l \frac{\partial X_l}{\partial x_l}\right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_l \frac{\partial X_l}{\partial x_l}\right)\cdot \mathbf{i}_k = \sum_{kl} \frac{\partial^2 X_l}{\partial x_k\,\partial x_l}\cdot \mathbf{i}_k .$$

Operando sôbre o símbolo de Hamilton, obtinha-se mais ràpidamente

$$rot\,rot\,\mathbf{r} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{r}) = (\nabla \,|\, \mathbf{r})\,\nabla - (\nabla \,|\, \nabla)\,\mathbf{r} = \nabla(\nabla \,|\, \mathbf{r}) - \Delta\,\mathbf{r} = grad\,div\,\mathbf{r} - Lap\,\mathbf{r}\,.$$

II. — FLUXO E CIRCULAÇÃO

7. — Fluxo.

A). **Definições.** Seja o campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ e considere-se, na região do espaço em que êle é definido, uma porção S de superfície com duas faces distintas.

Sabe-se que isso nem sempre é possível; há superfícies com uma face só. O exemplo mais simples, dado por Möbius, pode construir-se assim — toma-se uma tira rectangular de papel ABCD (fig. 54) e colam-se os dois bordos AB e CD, dobrando prèviamente a tira de modo tal que a letra D venha caír sôbre A e a letra C sôbre B. Dados dois pontos P e P′ sôbre a mesma normal à primitiva superfície S, mas em faces opostas, só se poderia ir de um a outro ou *atravessando* a superfície ou passando por um dos bordos; na nova superfície S′ passa-se, como imediatamente se vê, de um a outro por uma linha contínua sem atravessar a superfície e sem passar pelos bordos — a superfície tem uma face só.

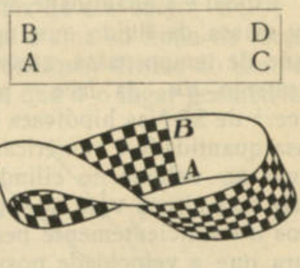


Fig. 54

Seja $d\sigma$ um elemento da superfície S e, num ponto P de $d\sigma$, $\mathbf{n}$ a semi-normal orientada. Se a superfície S fôr fechada, consideraremos como positiva, salvo menção expressa em contrário, a semi-normal orientada para o exterior; caso contrário, escolher-se há arbitràriamente uma face como positiva.

Def. 1.ª — Chama-se *fluxo elementar* do vector $\mathbf{v}(P)$ do campo, através do elemento $d\sigma$ da superfície S, da face negativa para a positiva, ao escalar

48) $$d\varphi = \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} \,.\, d\sigma$$
onde, como acima foi dito, **n** é a semi-normal correspondente à face positiva.

Def. 2.ª — Chama-se *fluxo total* do vector **v** (P), através de tôda a porção finita de superfície S, da face negativa para a face positiva, ao integral de superfície

49) $$\varphi = \iint_S \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} \,.\, d\sigma.$$

B). **Significação física.** Suponhamos que o campo vectorial de que se trata é um *campo de velocidades*, isto é, suponhamos que a região do espaço considerada está cheia dum fluido de densidade constante ρ, em movimento, e que **v** (P) é, em cada ponto P, a velocidade dêsse fluido; suponhamos ainda que é $\rho = 1$.

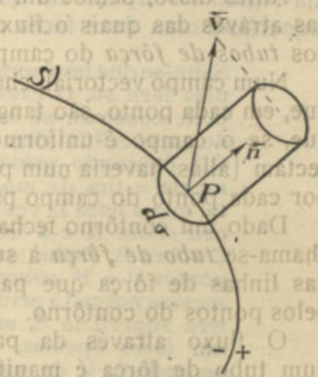


Fig. 55

¿ Qual é a quantidade, medida em massa, de fluido que, na unidade de tempo passa, através do elemento $d\sigma$, da face − para a face + de S? Nas hipóteses feitas, essa quantidade é numèricamente igual ao volume do cilindro de base $d\sigma$ e altura **v** | **n**, se supozermos $d\sigma$ suficientemente pequeno para que a velocidade possa ser considerada constante em todos os seus pontos. Essa quantidade de fluido é, portanto, igual ao fluxo $d\varphi$.

Considerando agora tôda a superfície S, vê-se que o fluxo φ é, afinal, a quantidade finita de fluido que, na unidade de tempo, passa através da superfície, da sua face negativa para a sua face positiva.

Se a superfície S fôr fechada, o fluxo total φ é a quantidade de fluido que, na unidade de tempo, *sai* da região do espaço limitada por S ou, melhor, o *excesso* da quantidade saída sôbre a entrada, dando o sinal + ao fluxo correspondente à passagem do interior para o exterior (fluido saído) e o sinal − ao correspondente à passagem do exterior para o interior (fluido entrado).

O anulamento do fluxo através duma superfície fechada significa, por conseqüência, que a quantidade de fluido entrado é igual à quantidade de fluido saído no mesmo tempo, isto é, que, *no global*, não há produção nem destruïção de fluido, podendo, no entanto, haver produções e destruïções *locais* que se neutralizem.

Quando há, num ponto, produção de fluido diz-se que há nele uma *fonte positiva*; quando há destruïção, diz-se que há uma *fonte negativa*. Veremos, dentro em pouco, uma condição suficiente para que não haja *fontes*.

Antes disso, dêmos um exemplo de superfícies não fechadas através das quais o fluxo é sempre nulo — são os chamados *tubos de fôrça* do campo.

Num campo vectorial, chamam-se *linhas de fôrça* às curvas que, em cada ponto, são tangentes ao vector do campo; é claro que, se o campo é uniforme, as linhas de fôrça não se intersectam [aliás haveria num ponto mais de um vector **v** (P)] — por cada ponto do campo passa uma e uma só linha de fôrça.

Dado um contôrno fechado (C) qualquer dentro do campo, chama-se *tubo de fôrça* à superfície que é o logar geométrico das linhas de fôrça que passam pelos pontos do contôrno.

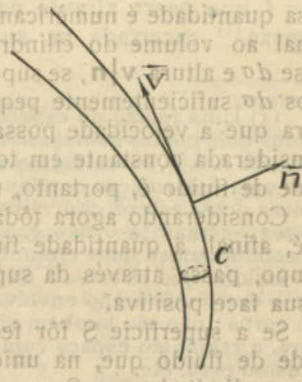


Fig. 56

O fluxo através da parede dum tubo de fôrça é manifestamente nulo, visto que **v** é, em todo o ponto da parede, perpendicular a **n** (fig. 56).

As designações: *linha de fôrça*, *tubo de fôrça* são adequadas sobretudo ao caso em que se considera o campo vectorial como um campo de fôrças, isto é, como fazendo corresponder a cada ponto do espaço uma fôrça (intensidade do campo magnético, por exemplo); no caso que supozemos, de se tratar dum campo de *velocidades*, melhor seria chamar-lhes *linhas de corrente* ou *linhas de fluxo*, *tubos de corrente* ou *tubos de fluxo*.

8. — **Teorema de Ostrogradsky-Gauss.** Sejam: S uma superfície fechada, contínua, encerrando um volume τ; **n** a semi-normal à superfície orientada positivamente para o exterior de τ; **v** um vector função uniforme contínua e derivável de $P(x_k)$ dentro de τ e sôbre S. *Verifica-se a igualdade*

$$50) \qquad \iiint_\tau div\,\mathbf{v}\,.\,d\tau = \iint_S \mathbf{n}\,|\,\mathbf{v}\,.\,d\sigma$$

que exprime que *o integral da divergência estendido ao volume τ é igual ao fluxo total do vector* **v** *através da superfície S* (teorema de Ostrogradsky-Gauss).

Êste teorema, conhecido também pelos nomes de *teorema da divergência* ou do *fluxo*, pode demonstrar-se por via meramente analítica, sem recurso a qualquer consideração de ordem física; vide, para êste efeito, qualquer tratado de Análise, por exemplo, R. Courant, *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung*, tomo 2.°, pg. 311 e seg.; J. Hadamard, *Cours d'Analyse*, tomo 1.°, pg. 440 e seg.

Vamos dar dêste teorema uma ilustração física. Para isso, suponhamos, como acima, que o campo vectorial é um campo de velocidades da corrente dum fluido de densidade constante $\rho = 1$ que passa através da região do espaço, simplesmente conexa [1] encerrada na superfície fechada e contínua S, e

---

(1) Uma região do espaço diz-se *simplesmente conexa* quando dados dois pontos *quaisquer* A e B dela e dois caminhos *quaisquer* indo de A a B, esses dois caminhos se podem reduzir um ao outro por uma deformação contínua deles e sem saír da região. Os interiores duma esfera, dum elipsoide, dum cilindro, são simplesmente conexos; mas já o não é, por exemplo, a região do plano compreendida entre duas circunferências concêntricas, visto que todo o caminho que envolva a circunferência menor se não pode reduzir a outro que a não envolva por deformação contínua e sem saír da corôa; não são também simplesmente conexos o interior dum toro, a região do espaço compreendida entre dois cilindros com o mesmo eixo, etc.

Pode definir-se ainda região do espaço simplesmente conexa como aquela que pode ser deduzida duma esfera por deformação contínua.

Ao contrário do que se passa numa região de conexão múltipla, numa simplesmente conexa tôda a curva fechada se pode reduzir por deformação contínua a um ponto.

suponhamos mais que a velocidade, função do campo, não depende do tempo mas apenas da posição do ponto P.

Seja $\mathbf{v} = v_1.\mathbf{i}_1 + v_2.\mathbf{i}_2 + v_3.\mathbf{i}_3$ a decomposição cartesiana de $\mathbf{v}(P)$ e dividamos o volume τ em paralelipípedos elementares por um triplo sistema de planos paralelos aos planos coordenados. Consideremos um dêsses paralelipípedos

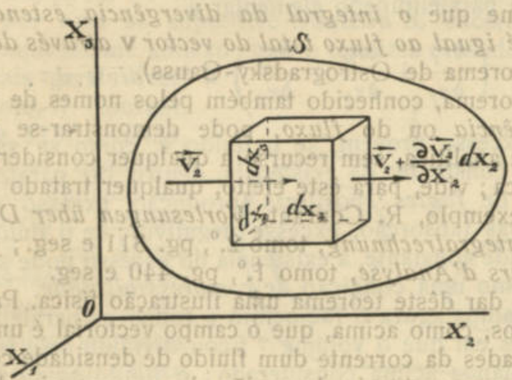


Fig. 57

elementares de volume $d\tau = dx_1.dx_2.dx_3$ (fig. 57) e vejamos qual a quantidade de fluido entrado e saído na unidade de tempo pelo sistema das duas faces paralelas ao plano Ox_1x_3. A componente de $\mathbf{v}$ perpendicular a essas faces é $\mathbf{v}_2 = v_2.\mathbf{i}_2$ e, por conseqüência, pela face da esquerda entra uma quantidade de fluido igual a $q_1 = v_2.dx_1.dx_3$. No trajecto para a segunda face dentro do paralelipípedo, v_2 sofre, em virtude do acréscimo dx_2, um acréscimo $dv_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdot dx_2$, de modo que pela face da direita sai uma quantidade de fluido igual a $q_2 = \left(v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdot dx_2\right) \cdot dx_1.dx_3$. O *excesso* do fluido saído sôbre o entrado na unidade de tempo é, então,

$$q_2 - q_1 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdot d\tau \cdot$$

Raciocinando do mesmo modo para os outros dois sistemas de faces paralelas, do paralelipípedo, tem-se que o excesso, positivo ou negativo, de fluido saído sôbre o entrado em todo o paralelipípedo elementar é

$$51) \qquad \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \cdot d\tau = div \mathbf{v} \,.\, d\tau .$$

Êste excesso provém, se o fluido é, como se supôs, de densidade constante, da existência, dentro do paralelipípedo elementar, de *fontes*: positivas (produção, excesso positivo) ou negativas (absorção, excesso negativo); se o fluido não é de densidade constante, a existência do excesso pode ser interpretada como uma condição de *compressibilidade*.

Estendamos agora o raciocínio a todos os paralelipípedos elementares em que o volume τ ficou dividido pelo triplo sistema de planos acima considerado; o fluido *saído* por cada face dum paralelipípedo elementar é fluido *entrado* no paralelipípedo que lhe está adjacente por essa face. No interior de S as somas dessas quantidades de fluido anulam-se, de modo que o limite da soma dos termos 51) ou seja $\iiint_\tau div\, \mathbf{v} \,.\, d\tau$ é o excesso total do fluido saído sôbre o entrado através da superfície S; mas êsse excesso é, como acima foi visto, o *fluxo total* do vector $\mathbf{v}(P)$ através de S, ou seja [7, 49)] $\varphi = \iint_S \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} \,.\, d\sigma$, donde, igualando, se obtém 50).

Observações. 1.ª — A igualdade 50) repousa, como se viu pelo raciocínio feito, sôbre a hipótese da continuïdade e derivabilidade de $\mathbf{v}(P)$ em τ e sôbre S; se assim não fôr, ela não é válida; os dois membros podem não existir ou existir e ter valores diferentes.

2.ª — Na região do espaço exterior a S, o vector $\mathbf{v}(P)$ pode ser descontínuo ou não existir; se isso se der, em vez de se considerar a semi-normal exterior toma-se a interior; não há mais que mudar o sinal ao sentido da normal e, portanto, ao integral de superfície que dá o fluxo; o teorema tem então por expressão analítica

$$52)\qquad \iiint_{\tau} div\,\mathbf{v}\,.\,d\tau = -\iint_{S} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma.$$

3.ª — Supôs-se, no raciocínio feito, que o volume τ era limitado por uma só superfície fronteira S, encerrando um volume simplesmente conexo; mas o teorema é válido em condições mais gerais (ver, por exemplo, R. Courant, loc. cit. pg. 313). É válido, em particular, quando o volume τ fôr limitado por uma superfície fechada contínua S e por outras superfícies fechadas, também contínuas, S_1, S_2, etc. (número finito) interiores à primeira (fig 58): o fluxo total é então a soma dos fluxos através de S, S_1, S_2, $\cdots$.

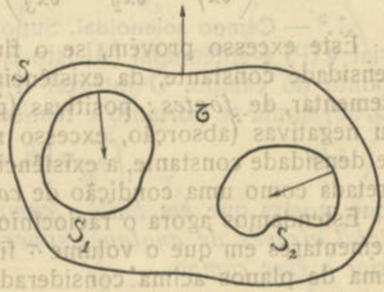


Fig. 58

Simplesmente, há que atender aos sinais das semi-normais a essas fronteiras limitantes internas; se a semi-normal $\mathbf{n}$ fôr orientada como em 50), para o *exterior de* τ, essas semi-normais devem ser orientadas, como mostra a fig. 58, para o *interior* das superfícies limitantes internas.

4.ª — Se no campo vectorial interior a S existem descontinuïdades (pontos, linhas ou superfícies) procede-se, para o seu estudo, do modo seguinte — isola-se a descontinuïdade por uma superfície fechada, contínua, S_1 que a envolva completamente e aplica-se o teorema de Ostrogradsky-Gauss ao volume interior às duas superfícies S e S_1, como acima foi indicado, procurando determinar para que tende o fluxo através da superfície S_1 quando ela tende, em tôdas as direcções, para o logar de descontinuïdade. Veremos um exemplo no parágrafo seguinte.

Expressão cartesiana. Seja $\mathbf{v}(P) = \sum_k v_k \cdot \mathbf{i}_k$ o vector do campo e $\mathbf{n} = \sum_k \cos(\mathbf{n}, x_k) \cdot \mathbf{i}_k$ a semi-normal exterior a S. A igualdade 50) escreve-se, como é óbvio,

$$53) \qquad \iiint_\tau \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \cdot d\tau = \iint_S \sum_k v_k \cdot \cos(\mathbf{n}, x_k) \cdot d\sigma .$$

9. — **Conseqüências do teorema de Ostrogradsky--Gauss.**

1.ª — **Campo solenoidal.** Suponhamos que o campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ é solenoidal [4] isto é, que $div\,\mathbf{v} = 0$ em todo o ponto do campo. O integral triplo do primeiro membro de 8, 50) anula-se portanto e tem-se

$$54) \qquad \iint_S \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} \cdot d\sigma = 0$$

que mostra que *em todo o campo solenoidal é nulo o fluxo total através de qualquer superfície fechada contínua interior a êsse campo.*

Tem-se portanto aqui uma condição suficiente para que no interior da superfície S não haja produção nem destruïção de fluido, não haja *fonte*, positiva nem negativa, visto que, o fluxo total sendo nulo, a quantidade de fluido entrado é igual à de fluido saído através da superfície. Por isso, como acima se disse [4], os campos solenoidais se chamam também campos *sem fonte*.

A condição não é, evidentemente, necessária visto que pode haver fontes positivas e negativas locais cuja acção se equilibre. Se, porém, o fluxo é nulo através de *qualquer* superfície fechada compreendida no campo considerado, é então $\iiint_\tau div\,\mathbf{v} \cdot d\tau = 0$ para τ *qualquer*, donde $div\,\mathbf{v} = 0$ em todo o campo, e o campo é solenoidal — a condição é, então, também necessária.

Se o campo $\mathbf{v}(P)$ é o campo de velocidades dum fluido, a condição $div\,\mathbf{v} = 0$ pode ser interpretada como a condição de *incompressibilidade* dêsse fluido.

Outro aspecto da questão é o seguinte. Sejam, no campo solenoidal, duas calotes de superfície S_1 e S_2 apoiando-se sôbre um contôrno fechado pelo qual passa uma porção de superfície S (um diafragma). Sejam τ_1 e τ_2 os volumes limitados por $S+S_1$ e $S+S_2$ (fig. 59). O teorema de Gauss dá imediatamente, por ser $div\, \mathbf{v}=0$ tanto em τ_1 como em τ_2,

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma = \iint_{S+S_2} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma$$

sendo as normais orientadas como na figura. Desta igualdade tira-se

$$\iint_{S_1} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma = \iint_{S_2} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma,$$

isto é, *no campo solenoidal, o fluxo através de qualquer calote de superfície apoiada num dado contôrno fechado é constante.* Esta propriedade será completada adiante [13, 4.ª].

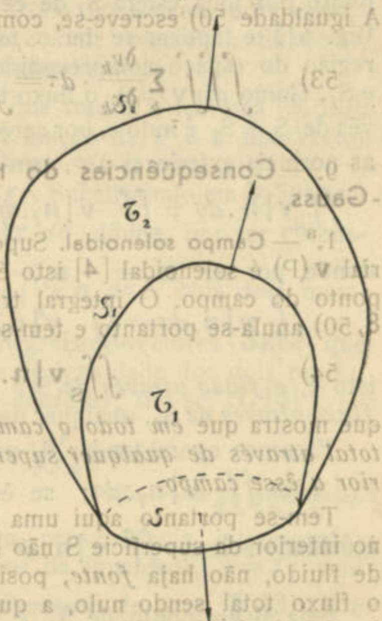


Fig. 59

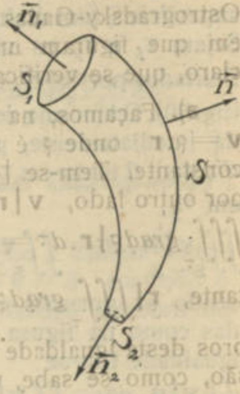
Sempre que isto se dá, o fluxo diz-se *conservativo*. Consideremos, em particular, um *tubo de fôrça* dentro do campo solenoidal e limitêmo-lo por dois diafragmas S_1 e S_2 formando bases (fig. 60). Como a superfície total $S+S_1+S_2$ é fechada, o teorema de Gauss dá $\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma=0$ e como o fluxo através de S é nulo [7] vem $\iint_{S_1} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}_1\,.\,d\sigma = -\iint_{S_2} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}_2\,.\,d\sigma$ isto é, *a quantidade de fluido entrado por uma das bases do tubo de fôrça é igual à quantidade de fluido saído pela outra, quaisquer que sejam as bases e a sua forma.*

Descontinuïdades. Suponhamos que no campo solenoidal há um ponto de descontinuïdade. Seguindo o método indicado em **8**, observação 4.ª, isolar-se há êsse ponto por uma esfera S_1 de centro nele (fig. 61) e aplicar-se há o teorema à região do espaço compreendida entre S e S_1. Como $div\,\mathbf{v}=0$, o fluxo total através de $S+S_1$ é nulo e, por serem $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}'_1$ as normais exteriores a τ, tem-se

$$\iint_S \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma+\iint_{S_1} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}'_1.d\sigma=0$$

donde, por ser $\mathbf{n}'_1=-\mathbf{n}_1$,

$$\iint_S \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}.d\sigma=\iint_{S_1} \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}_1.d\sigma$$



(Fig. 60)

isto é, *o fluxo através de* S *é igual ao fluxo através de* S_1, qualquer que seja S_1.

Façamos agora tender S_1 para o ponto O e procuremos $\rho=\lim\limits_{s_1\to 0}\iint_{S_1}\mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}_1.d\sigma$; se êsse limite existir, será, pela igualdade acima, $\iint_S \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma=\rho$.

Seja M um ponto de S_1, e $\varepsilon=mod\,\overrightarrow{OM}$; se o produto $\varepsilon.\mathbf{v}$ é finito em O, o módulo da função integranda $\mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}_1$ é inferior a $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ sendo α uma constante positiva; e como a área de integração S_1 é $4\pi\varepsilon^2$, o teorema da média dos integrais múltiplos mostra que o valor absoluto do integral é inferior a

$$4\pi\varepsilon^2\,.\,\frac{\alpha}{\varepsilon}=4\pi\alpha\varepsilon$$

donde $\rho=0$.

Fig. 61

Conclue-se daqui que *o fluxo total é ainda nulo através de* S *como se não houvesse ponto de descontinuïdade em* O.

2.ª — **Teoremas do gradiante e do rotacional.** Do teorema de Ostrogradsky-Gauss tiram-se, como corolários, dois outros em que figuram um gradiante e um rotacional. Supõe-se, claro, que se verificam as condições iniciais.

a). Façamos, na igualdade que traduz o teorema [8, 50)], $\mathbf{v}=\rho.\mathbf{r}$ onde ρ é um escalar função de P e $\mathbf{r}$ um vector constante. Tem-se [4, 26)] $div\,\mathbf{v}=div(\rho.\mathbf{r})=grad\,\rho|\mathbf{r}$ e, por outro lado, $\mathbf{v}|\mathbf{n}=(\rho.\mathbf{n})|\mathbf{r}$. Substituindo em 8, 50) vem $\iiint_\tau grad\,\rho|\mathbf{r}.d\tau=\iint_S(\rho.\mathbf{n})|\mathbf{r}.d\sigma$ donde, por ser $\mathbf{r}$ constante, $\mathbf{r}|\iiint_\tau grad\,\rho.d\tau=\mathbf{r}|\iint_S\rho.\mathbf{n}.d\sigma$. Nos dois membros desta igualdade figuram integrais de vectores [3, 12] que são, como se sabe, vectores, e da igualdade dos dois produtos escalares, verificada para $\mathbf{r}$ *qualquer*, tira-se, [1, 13]

$$55)\qquad \iiint_\tau grad\,\rho.d\tau=\iint_S\rho.\mathbf{n}.d\sigma.$$

(teorema do gradiante).

Dêste teorema tira-se uma conseqüência interessante; façamos, em ambos os membros da igualdade, $\rho=1$; vem $\iint_S\mathbf{n}.d\sigma=0$. Ora $d\sigma$ é o elemento de área [3, 13, C)] e $\mathbf{n}.d\sigma$ o elemento de área orientada; por conseqüência, a igualdade anterior mostra que *a área total orientada duma superfície fechada é nula.*

b). Façamos $\mathbf{v}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{r}$ sendo $\mathbf{r}$ um vector constante. Tem-se [4, 27)] $div\,\mathbf{v}=div(\mathbf{u}\wedge\mathbf{r})=\mathbf{r}|rot\,\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}|\mathbf{n}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{r}|\mathbf{n}=\mathbf{r}|\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}$ donde, substituindo em 8, 50) e pela mesma razão invocada acima, se obtém

$$56)\qquad \iiint_\tau rot\,\mathbf{u}.d\tau=\iint_S\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}.d\sigma$$

(teorema do rotacional).

É fácil escrever a expressão cartesiana dêstes dois teoremas.

3.ª — Invariância dos operadores diferenciais. Os três teoremas: da divergência (Gauss) do gradiante e do rotacional tornam imediato o facto, já assinalado em **2,** C) num caso particular — que *os três operadores diferenciais são invariantes com o sistema de referência.*

Efectivamente, as igualdades **8,** 50, 55) e 56) permitem dar definições novas dos operadores. Seja uma região simplesmente conexa τ do espaço, encerrada numa superfície fechada e contínua S. Seja P um ponto no interior de S, no qual é definida e contínua $div\,\mathbf{v}$, e façamos tender S em tôdas as direcções para P. Tem-se, como se sabe

$$div\,\mathbf{v}(\mathrm{P})=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\iiint_{\tau} div\,\mathbf{v}\,.\,d\tau$$ donde, em virtude do teorema de Ostrogradsky-Gauss

$$57)\quad div\,\mathbf{v}(\mathrm{P})=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\iint_{\mathrm{S}}\mathbf{v}|\mathbf{n}\,.\,d\sigma=\lim_{\mathrm{S}\to\mathrm{P}}\frac{\iint_{\mathrm{S}}\mathbf{v}|\mathbf{n}\,.\,d\sigma}{\iiint_{\tau}d\tau}.$$

Anàlogamente, dos teoremas do gradiante e do rotacional se tira [**3,** 12, 77)]

$$grad\,\rho(\mathrm{P})=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\iiint_{\tau} grad\,\rho\,.\,d\tau,$$

$$rot\,\mathbf{v}(\mathrm{P})=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\iiint_{\tau} rot\,\mathbf{v}\,.\,d\tau$$ logo

$$58)\quad grad\,\rho(\mathrm{P})=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\iint_{\mathrm{S}}\rho\,.\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma=\lim_{\mathrm{S}\to\mathrm{P}}\frac{\iint_{\mathrm{S}}\rho\,.\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma}{\iiint_{\tau}d\tau}.$$

$$59)\quad rot\,\mathbf{v}(\mathrm{P})=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\cdot\iint_{\mathrm{S}}\mathbf{n}\wedge\mathbf{v}\,.\,d\sigma=\lim_{\mathrm{S}\to\mathrm{P}}\frac{\iint_{\mathrm{S}}\mathbf{n}\wedge\mathbf{v}\,.\,d\sigma}{\iiint_{\tau}d\tau}.$$

Como se vê, os segundos membros destas três igualdades, que podem ser tomadas como definições dos operadores, não dependem do sistema de referência empregado, com o que fica estabelecida a invariância.

10. — **Fórmulas de Green.** Voltemos ao teorema de Ostrogradsky-Gauss 8, 50)

$$\iiint_\tau div\,\mathbf{v}.d\tau = \iint_S \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}.d\sigma$$

válido nas condições expressas no parágrafo 8. Seja U(P) um escalar função de P, *contínua* em τ e sôbre S, bem como as suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem, e tal que $\mathbf{v} = grad\,U$, o que equivale a supôr que o campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ deriva do potencial escalar $-U$ se U é, além de contínua, *uniforme*. Tem-se $div\,\mathbf{v} = div\,grad\,U = Lap\,U$ [6, 35)] e $\mathbf{n}\,|\,\mathbf{v} = \mathbf{n}\,|\,grad\,U$, donde, substituindo,

$$60)\qquad \iiint_\tau Lap\,U.d\tau = \iint_S \mathbf{n}\,|\,grad\,U.d\sigma$$

(1.ª fórmula de Green)

que exprime que *o integral do laplaciano de* U *estendido ao volume* τ, *nas condições gerais do teorema de Ostrogradsky-Gauss, é igual ao fluxo do gradiante de* U *através da superfície que limita* τ.

A 1.ª fórmula de Green pode ainda escrever-se, notando que [2, 15)] $\mathbf{n}\,|\,grad\,U = \dfrac{\partial U}{\partial n}$,

$$61)\qquad \iiint_\tau Lap\,U.d\tau = \iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma.$$

Conclue-se daqui imediatamente que se U é uma função harmónica [6, 38)] no domínio considerado, se tem

$$62)\qquad \iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma = 0.$$

Em particular, fazendo $r = mod\,[P(x_k) - O(a_k)]$, tem-se

$$63)\qquad \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\cdot d\sigma = 0$$

desde que S não encerre o ponto $O(a_k)$.

Sejam agora U e V duas funções contínuas em τ e sôbre S, bem como as suas derivadas de primeira e segunda ordem, e tais que $\mathbf{v} = V.grad U$. Tem-se [4, 26)] $div\,\mathbf{v} = div(V.grad U) = V.div\,grad U + grad V \,|\, grad U = V.Lap U + grad V \,|\, grad U$ e $\mathbf{n} \,|\, \mathbf{v} = \mathbf{n} \,|\, V.grad U = V \cdot \frac{\partial U}{\partial n}$, donde, substituindo em **8**, 50)

$$64) \quad \iiint_{\tau} (V.Lap U + grad U \,|\, grad V).d\tau = \iint_{S} V.\frac{\partial U}{\partial n} \cdot d\sigma$$

(2.ª fórmula de Green).

Mudando, nesta igualdade, U em V e V em U e subtraindo ordenadamente, obtém-se

$$65) \iiint_{\tau} (V.Lap U - U.Lap V).d\tau = \iint_{S} \left(V \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \right) \cdot d\sigma$$

(3.ª fórmula de Green).

Se U e V são funções harmónicas, resulta daqui

$$66) \quad \iint_{S} \left(V \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \right) \cdot d\sigma = 0.$$

Em tôdas estas fórmulas, **n** designa sempre a semi-normal exterior a S.

Demonstra-se que as fórmulas de Green subsistem quando as derivadas de 2.ª ordem apresentam descontinuïdades sôbre S, conservando-se porém finitas; para a demonstração, ver C. Jordan, *Cours d'Analyse*, tomo 2.º, pg. 176 e seg.

Façamos agora na 3.ª fórmula de Green, $V = \frac{1}{r}$ com $r = mod[P(x_k) - O(a_k)]$. Por ser $\frac{1}{r}$ função harmónica, vem, *se o ponto* O *é exterior a* S:

$$67) \quad \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \cdot Lap U.d\tau = \iint_{S} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \cdot d\sigma.$$

Se o ponto O não é exterior a S, esta igualdade deixa de ser válida, visto haver então descontinuïdade da função $\frac{1}{r}$ dentro de S. Demonstra-se, (ver, por exemplo, C. Jordan, *Cours d'Analyse*, tomo 2.°, pg. 181 e seg.), que se o ponto O é *interior* a S se tem

68)
$$\iiint_{\tau} \frac{1}{r} \cdot Lap\, U . d\tau = \iint_S \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \cdot d\sigma - 4\pi U$$

onde U é tomado no ponto $O(a_k)$, e que se o ponto O *está sôbre* S, vale então a igualdade

69)
$$\iiint_{\tau} \frac{1}{r} \cdot Lap\, U . d\tau = \iint_S \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \cdot d\sigma - 2\pi U.$$

Se U fôr função harmónica, anula-se o integral triplo e tem-se

$$70) \quad \iint_S \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) \cdot d\sigma = \begin{cases} 0 & \leftarrow \text{O exterior a S} \\ 4\pi U & \leftarrow \text{O interior a S} \\ 2\pi U & \leftarrow \text{O sôbre S.} \end{cases}$$

Teorema de unicidade. Seja τ uma região simplesmente conexa do espaço, limitada por uma superfície fechada S, contínua. Demonstra-se, e dessa demonstração não nos ocuparemos aqui, que é possível determinar um vector **v**, função de P em τ, desde que sejam dados: *a*) em cada ponto interior a S, um número $r = div\,\mathbf{v}$ e um vector $\mathbf{s} = rot\,\mathbf{v}$; *b*) em cada ponto da fronteira S, a projecção de **v** sôbre a normal **n** exterior a S.

Como aplicação da 2.ª fórmula de Green, vamos provar que a solução dêste problema é única.

Seja então *um* vector **v**, satisfazendo a

$$div\,\mathbf{v} = r, \quad rot\,\mathbf{v} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} = v_n$$

(r, **s**, v_n dados) e suponhamos que há outra solução do problema, isto é, que existe um vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ tal que

$$div\,\mathbf{u} = r, \quad rot\,\mathbf{u} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{u} \,|\, \mathbf{n} = v_n.$$

Fazendo $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, tem-se

$$div\,\mathbf{w} = 0, \quad rot\,\mathbf{w} = 0, \quad w_n = \mathbf{w} \,|\, \mathbf{n} = v_n - v_n = 0.$$

De ser $rot\,\mathbf{w}=0$, resulta que há uma função U tal que $\mathbf{w}=grad\,U$, donde $div\,\mathbf{w}=Lap\,U=0$. Na 2.ª fórmula de Green façamos $V=U$; vem

$$\iiint_\tau (U.Lap\,U+grad\,U\,|\,grad\,U).d\tau=\iint_S U\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma$$

e apliquemo-la à função U, cujo gradiante é $\mathbf{w}$. Como $\frac{\partial U}{\partial n}=\mathbf{n}\,|\,grad\,U=\mathbf{n}\,|\,\mathbf{w}=0$ e por ser $Lap\,U=0$, obtém-se $\iiint_\tau (mod\,grad\,U)^2.d\tau=0$. Ora, pelas hipóteses feitas, esta igualdade é válida quando o campo de integração é não o campo total mas sim *qualquer* dentro do campo total, logo deve ser $grad\,U=0$ donde $\mathbf{w}=0$ e $\mathbf{u}=\mathbf{v}$; a solução é, portanto, única.

11. — **Circulação. Definição.** Seja (C) uma curva do espaço, contínua, sem ponto múltiplo, odógrafa do vector $\mathbf{r}(s)$, onde s é a abscissa curvilínea [**3**, *5*]. Seja $\mathbf{v}(P)=\mathbf{v}(s)$ um vector função uniforme, contínua e derivável de s e $\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ o vector unitário da tangente à curva no ponto P.

Dá-se o nome de ***circulação elementar*** do vector $\mathbf{v}(P)$ sôbre o arco ds ao infinitésimo $\mathbf{v}\,|\,\mathbf{t}.ds$ e o de ***circulação total*** ao longo do arco AB da curva (C) ao integral curvilíneo

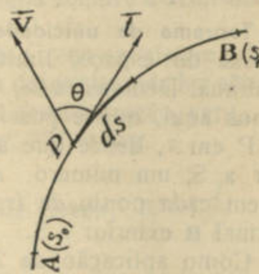


Fig. 62

71) $\Gamma_{AB}=\int_{AB}\mathbf{v}\,|\,\mathbf{t}.ds.$

Significação física da circulação. Suponhamos que o vector $\mathbf{v}(P)$ é uma ***fôrça*** função do ponto P, $\mathbf{v}(P)=\mathbf{F}(P)$. Ao produto $\mathbf{F}\,|\,d\mathbf{r}=mod\,\mathbf{F}.cos\,\theta.ds$ dá-se o nome de ***trabalho elementar*** da fôrça $\mathbf{F}(P)$ sôbre o deslocamento infinitésimo ds, e ao integral curvilíneo $\int_C \mathbf{F}\,|\,d\mathbf{r}$ o de ***trabalho total*** ao longo da curva (C). O trabalho é, por conseqüência, uma circulação.

Propriedades. Da definição [71)] e das propriedades dos integrais curvilíneos resultam imediatamente as seguintes propriedades da circulação.

Prop. 1.ª — A circulação conserva o valor absoluto e muda de sinal quando, conservando os extremos do arco, se muda o sentido do percurso.

Efectivamente

$$72) \qquad \int_{AB} \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \,.\, ds = -\int_{BA} \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \,.\, ds .$$

Prop. 2.ª — Se A, B, C *são três pontos sôbre uma curva, tem-se, qualquer que seja a sua posição relativa,*

$$73) \qquad \int_{AB} \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \,.\, ds + \int_{BC} \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \,.\, ds = \int_{AC} \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \,.\, ds .$$

Prop. 3.ª — Seja (C) *uma curva fechada, plana ou torsa, e* (C_1) *outra curva juntando dois pontos de* (C) (fig. 63); *a circulação ao longo de* $(C)+(C_1)$ *é igual à circulação ao longo de* (C).

Escolhamos, sôbre a curva (C) = A D B E A como positivo aquêle sentido de percurso tal que, durante êle, uma porção de superfície limitada por (C) seja deixada à esquerda — é o sentido das setas na fig. 63. Seja (C_1) a curva AFB. Tem-se

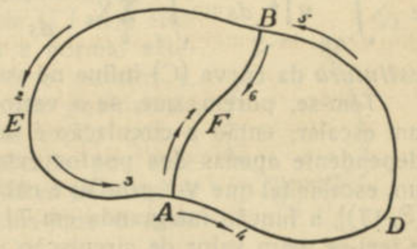


Fig. 63

$$\int_{C+C_1} = \int_{AFB} + \int_{BEA} + \int_{ADB} + \int_{BFA} = \int_{BEA} + \int_{ADB} = \int_{C}$$

visto que, pela propriedade 1.ª, é $\int_{AFB} + \int_{BFA} = 0$.

Mais geralmente, se houver uma curva fechada (C) e uma *rêde* sôbre uma calote de superfície apoiada em (C), a circulação ao longo da curva (C) é a mesma que ao longo de (C) mais todos os percursos interiores da rêde, visto que cada um dêsses percursos é descrito duas vezes, sendo uma em cada sentido; supõe-se, evidentemente, que não se altera, durante o percurso total, o sentido geral marcado pela seta exterior na fig. 64.

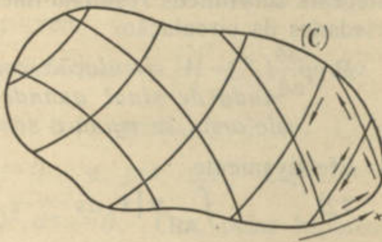


Fig. 64

Independência da circulação em relação ao caminho. Da definição dada de circulação [71)] resulta que ela depende, em geral, além do vector $\mathbf{v}(s)$ e dos pontos extremos A e B, ainda *da própria curva,* isto é, do *caminho* da circulação.

Com efeito, de $\mathbf{r}(s) = \sum_k x_k(s) \, . \, \mathbf{i}_k$ e $\mathbf{v}(s) = \sum_k X_k(s) \, . \, \mathbf{i}_k$ resulta

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sum_k \frac{dx_k}{ds} \cdot \mathbf{i}_k, \text{ donde } \mathbf{v} \,|\, d\mathbf{r} = \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \, . \, ds = \sum_k X_k \cdot \frac{dx_k}{ds} \cdot ds$$

e $\displaystyle\int_{AB} \mathbf{v} \,|\, \mathbf{t} \, . \, ds = \int_{s_0}^{s_1} \sum_k X_k \cdot \frac{dx_k}{ds} \cdot ds$ o que mostra que a *estrutura* da curva (C) influe no valor da circulação.

Tem-se, porém, que, se o vector $\mathbf{v}(P)$ fôr o gradiante de um escalar, então a circulação é independente do caminho e dependente apenas dos pontos extremos. Seja, com efeito, V um escalar tal que $\mathbf{v} = grad V$; é então $\mathbf{v} \,|\, d\mathbf{r} = grad V \,|\, d\mathbf{r} = dV$ [3, 17)], a função integranda em 71) é uma diferencial exacta e tem-se, para valor da circulação,

$$74) \qquad \Gamma_{AB} = \int_{AB} dV = V_B - V_A$$

sendo V_A e V_B os valores que toma o escalar $V(P)$ nos extremos do arco. Pode enunciar-se, portanto, o seguinte

Teorema — É condição suficiente para que a circulação dum vector $\mathbf{v}(P)$ *não dependa da curva ao longo da qual ela se toma, mas apenas dos seus pontos extremos, que êsse vector seja o gradiante de um escalar.*

No parágrafo 13 será estudada a condição necessária.

Se a função V é uniforme, então o campo *deriva* do potencial-escalar $-V$ [$\mathbf{v} = -grad(-V)$], logo, *em todo o campo que deriva dum potencial a circulação é independente do caminho.*

Pode, por conseqüência, deformar-se contìnuamente, de qualquer maneira, o caminho que une dois pontos quaisquer A e B (de modo que o caminho durante e depois da deformação não saia do campo) sem que a circulação do campo entre A e B se altere. Mais, podem fazer-se escorregar de qualquer maneira os dois pontos A e B sôbre as suas respectivas superfícies de nível: a circulação mantém-se constante e igual a $V_B - V_A$.

Estes resultados transportam-se imediatamente para o caso de o campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ ser um campo de fôrças, caso em que, como se viu, a circulação é um *trabalho*.

12. — **Circulação ao longo duma curva fechada.** Seja (C) uma curva fechada, contínua, sem ponto múltiplo e S uma calote de superfície (fig. 65) com duas faces, limitada por (C) e tal que a região do espaço limitada por S e um diafragma apoiado em (C) seja simplesmente conexa. Seja $\mathbf{n}$ a normal exterior a S; a escôlha da face exterior e, conseqüentemente, do sentido positivo da normal exterior, faz-se de modo que a axialidade do espaço marcada por êsse sentido e pelo sentido positivo da circulação sôbre (C) seja a mesma que é dada pelo triedro fundamental Ox_1, x_2, x_3. Seja ainda $\mathbf{v}(P)$ um campo vectorial uniforme, contínuo e derivável no qual (C) e S estão imersas.

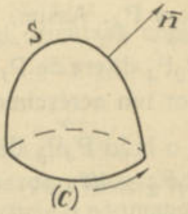


Fig. 65

O teorema seguinte relaciona a *circulação* ao longo de (C) com o *fluxo* através de S.

Teorema de Ampère-Stokes. — *A circulação do vector* $\mathbf{v}(P)$ *ao longo de* (C) *é igual ao fluxo do seu rotacional através de* S, isto é

$$\int_C \mathbf{v} \,|\, d\mathbf{r} = \iint_S rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} . d\sigma. \tag{75}$$

Em primeiro logar, pela propriedade 3.ª do parágrafo anterior, se se dividir a calote S por uma rêde de curvas (fig. 64), a circulação ao longo de (C) é igual à circulação ao longo de (C_1), sendo (C_1) formado por (C) e por todos os contornos interiores da rêde.

Vamos calcular esta circulação total, para o que consideraremos um paralelogramo infinitésimo da rêde: $P_1 P_2 P_3 P_4$ (fig. 66).

Façamos $\overrightarrow{P_1 P_2} = d\mathbf{r}$, $\overrightarrow{P_1 P_4} = \partial\mathbf{r}$ — o primeiro tem o mesmo sentido que o percurso, o segundo o sentido contrário.

Em geral, representaremos por d o acréscimo sofrido por uma grandeza vectorial no sentido de P_1 para P_2 e por ∂ o acréscimo sofrido no sentido de P_1 para P_4. Assim, o lado $\overrightarrow{P_2P_3}$ difere de $\overrightarrow{P_1P_4} = \partial\mathbf{r}$ por um acréscimo $d(\partial\mathbf{r})$ e o lado $\overrightarrow{P_4P_3}$ difere de $P_1P_2 = d\mathbf{r}$ por um acréscimo $\partial(d\mathbf{r})$, [isto é

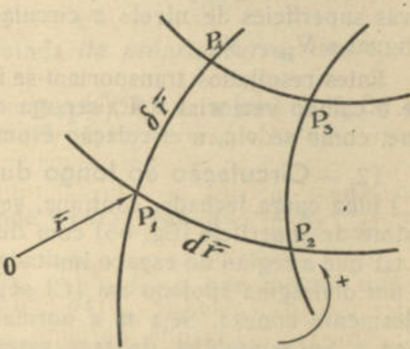


Fig. 66

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \partial\mathbf{r} + d(\partial\mathbf{r})$$

$$\overrightarrow{P_4P_3} = d\mathbf{r} + \partial(d\mathbf{r}).$$

Mas, para que o paralelogramo *feche* em P_3, deve ser $\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} = \overrightarrow{P_1 P_4} + \overrightarrow{P_4 P_3}$, isto é, $d\mathbf{r} + \partial\mathbf{r} + d(\partial\mathbf{r}) = \partial\mathbf{r} + d\mathbf{r} + \partial(d\mathbf{r})$, logo, tem-se como *condição para que o paralelogramo feche*

76) $$d(\partial\mathbf{r}) = \partial(d\mathbf{r}).$$

Posto isto, calculemos a circulação $\partial\Gamma$ de $\mathbf{v}$ ao longo do paralelogramo. Notando que $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$ têm o sentido da circulação e $\overrightarrow{P_4P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$ o sentido contrário, tem-se

$$\begin{aligned}\partial\Gamma &= \mathbf{v}|d\mathbf{r} + (\mathbf{v}+d\mathbf{v})|[\partial\mathbf{r}+d(\partial\mathbf{r})] - (\mathbf{v}+\partial\mathbf{v})|[d\mathbf{r}+\partial(d\mathbf{r})] - \mathbf{v}|\partial\mathbf{r}\\ &= \mathbf{v}|[d(\partial\mathbf{r}) - \partial(d\mathbf{r})] + d\mathbf{v}|\partial\mathbf{r} - \partial\mathbf{v}|d\mathbf{r} + d\mathbf{v}|d(\partial\mathbf{r}) - \partial\mathbf{v}|\partial(d\mathbf{r})\\ &= d\mathbf{v}|\partial\mathbf{r} - \partial\mathbf{v}|d\mathbf{r} + (d\mathbf{v} - \partial\mathbf{v})|d(\partial\mathbf{r}) \qquad [76)].\end{aligned}$$

Ora [**5**, 32)] $d\mathbf{v}|\partial\mathbf{r} - \partial\mathbf{v}|d\mathbf{r} = rot\,\mathbf{v}|d\mathbf{r}\wedge\partial\mathbf{r}$, logo

77) $$\partial\Gamma = rot\,\mathbf{v}|d\mathbf{r}\wedge\partial\mathbf{r} + (d\mathbf{v} - \partial\mathbf{v})|d(\partial\mathbf{r}).$$

Intervém agora aqui uma questão de métrica. Define-se [**3**, **13**, 86)] área dum paralelogramo elementar de superfície como a área do paralelogramo rectilíneo correspondente, dado pelos vectores infinitésimos tangentes aos lados, o que equivale, nessa métrica, a desprezar infinitésimos de ordem superior a *2*. Tem-se assim

$$d\mathbf{r}\wedge\partial\mathbf{r} = \mathbf{n}\,.\,d\sigma$$

onde é $d\sigma = mod\,(d\mathbf{r}\wedge\partial\mathbf{r})$ e $\mathbf{n}$ a normal orientada como foi dito. De 77) resulta, portanto,

$$\partial\Gamma = rot\,\mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma + w$$

onde w é um infinitésimo de ordem superior à de $d\sigma$.

Estendendo agora a circulação a todos os paralelogramos infinitésimos em que ficou decomposta a superfície S e tomando o limite da soma quando $d\mathbf{r}$ e $\partial\mathbf{r}$ tendem para zero, o que equivale a $d\sigma$ tender para zero, o primeiro membro tende para Γ_{C_1} e o segundo para $\iint_S rot\,\mathbf{v}|\mathbf{n}\,.\,d\sigma$ e, como $\Gamma_{C_1} = \Gamma_C$, tem-se finalmente

$$\Gamma_C = \int_C \mathbf{v}\,|\,d\mathbf{r} = \iint_S rot\,\mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma \qquad q.e.d.$$

Expressão cartesiana. Seja, num triedro fundamental Ox_1, x_2, x_3, $\mathbf{v}(P) = \sum_k v_k\,.\,\mathbf{i}_k$. Tem-se imediatamente

78) $$\int_C v_1 . dx_1 + v_2 . dx_2 + v_3 . dx_3 =$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \cdot \cos(\mathbf{n}, x_1) + \cdots \right] . d\sigma .$$

13. — Conseqüências do teorema de Ampère-Stokes.

1.ª — **Campo com potencial.** Seja um campo escalar V(P), uniforme, contínuo e derivável, e seja **v**(P) o campo vectorial definido por $\mathbf{v} = grad\, V$.

Consideremos no campo um contôrno fechado e uma calote de superfície apoiada nêle, nas condições do teorema de Stokes [**12**, 75)]. De ser [**6**, 45)] $rot\, grad\, V \equiv 0$, resulta que $\int_C \mathbf{v} \,|\, d\mathbf{r} = 0$, isto é, que *em todo o campo que deriva dum potencial é nula a circulação ao longo de qualquer curva fechada* (C) *nas condições do teorema de Stokes.*

A interpretação física é imediata — *em tôdo o campo com potencial é nulo o trabalho duma fôrça ao longo dum percurso fechado.*

Êste resultado pode tirar-se, independentemente do teorema de Stokes, recorrendo às considerações feitas no parágrafo **11** sôbre a independência da circulação em relação ao caminho. Viu-se, com efeito, lá que se o vector **v**(P) é o gradiante dum escalar V(P), a circulação entre dois pontos A e B não depende do caminho, mas apenas de A e B: $\Gamma_{AB} = V_B - V_A$. Seja então a curva fechada AGBH (fig. 67). Tem-se

$$\Gamma_{AGB} = V_B - V_A, \quad \Gamma_{BHA} = \overline{V}_A - V_B$$

onde se representa por $\overline{V}_A$ o valor que a função toma *ao voltar a* A depois de descrita a curva (C). A circulação total ao longo da curva é

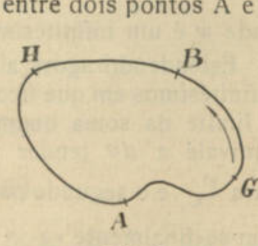


Fig. 67

portanto $\Gamma = \overline{V}_A - V_A$ e, *se a função* V *é uniforme,* isto é, se o campo **v**(P) deriva dum potencial, $\Gamma = 0$.

A uniformidade de V(P) desempenha, como se vê, aqui um papel fundamental; pode acontecer que haja, no campo considerado, ***singularidades***, isto é, pontos ou linhas tais que, em todo o percurso fechado que os envolva, a função V volte ao ponto de partida com um valor diferente. É o que acontece, por exemplo, com a função $V = arctg\frac{y}{x}$ — dado um ponto M do plano Oxy, ao qual corresponde o ângulo polar θ, sôbre uma circunferência de centro na origem e raio $\overline{OM}$ a função volta a M, se o percurso se faz uma só vez e no sentido directo, com o valor $\theta + 2\pi$; a circulação do vector $\mathbf{v} = grad\, arc\, tg\frac{y}{x}$ ao longo dêsse percurso é, portanto, $\overline{V}_M - V_M = 2\pi$; se a circunferência é descrita k vezes no sentido directo a circulação é igual a $2k\pi$.

É fácil ver que a circulação não depende da forma da curva mas apenas do número de voltas que ela dá em tôrno do ponto. Sejam, com efeito, duas curvas fechadas (C_1) e (C_2) envolvendo a origem (fig. 68) e dando, cada uma delas, uma volta só em tôrno dela. Façamos um corte AB de espessura infinitésima e consideremos o percurso fechado com origem e extremidade em A e feito na ordem indicada pelos números das setas da figura. Tal percurso não envolve a origem e, por conseqüência, na hipótese de não haver mais singularidades no campo, a circulação total ao longo dêle é nula. Ora essa circulação decompõe-se do modo seguinte: $\Gamma_{C_2} + \Gamma_{AB} - \Gamma_{C_1} + \Gamma_{BA} = 0$ visto que o sentido de percurso sôbre (C_1) é opôsto do sentido sôbre (C_2); é, portanto, $\Gamma_{C_1} = \Gamma_{C_2}$.

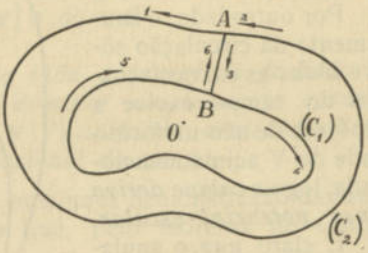


Fig. 68

É claro que as mesmas considerações se aplicam, qualquer que seja a natureza da singularidade que origina a não-uniformidade e qualquer que seja o ponto do plano em que essa singularidade se dê.

No espaço passa-se uma coisa análoga — pode então haver, não só pontos, mas *linhas de singularidade;* em todo o percurso fechado que envolva uma linha dessas, a circulação não é nula mas tem um valor constante, dependente apenas do número de voltas que êle dá em torno da linha de singularidade.

2.ª — **Anulamento da circulação.** Seja o campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ uniforme, contínuo e derivável, e suponhamos que a circulação é nula ao longo de qualquer curva fechada (C) do campo. Tem-se então que, para *tôda a calote* de superfície imersa no campo e apoiada em (C), é $\iint_S rot\,\mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma = 0$ o que exige que seja $rot\,\mathbf{v} = 0$ em todo o campo, isto é que $\mathbf{v} = grad\,V$. Tem-se portanto que *é condição necessária para que a circulação seja nula ao longo de todo o percurso fechado* (C) *do campo* $\mathbf{v}(P)$ *que êle seja irrotacional.*

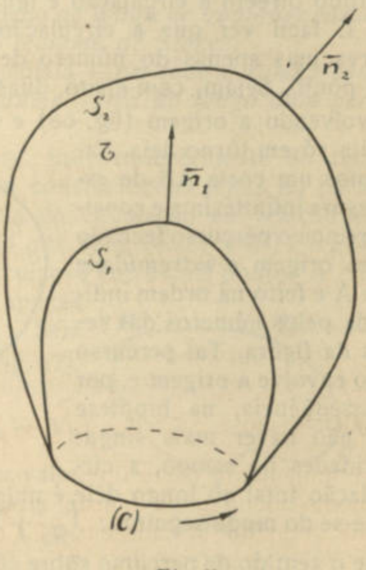


Fig. 69

Por outro lado, o anulamento da circulação sôbre *tôdas* as curvas fechadas do campo exclue a hipótese de não-uniformidade de V acima mencionada, logo *o campo deriva dum potencial-escalar.*

É claro que o anulamento da circulação ao longo de qualquer curva fechada do campo implica que a circulação entre dois pontos quaisquer do campo é independente do caminho. Sejam (fig. 67) os pontos A e B; de ser $\Gamma_{AGBHA} = 0$ resulta $\Gamma_{AGB} = \Gamma_{AHB}$. A propriedade anterior pode, portanto enunciar-se dizendo que *é condição necessária para que a circulação no campo* $\mathbf{v}(P)$ *não dependa do caminho que êle derive dum potencial* (v. o teorema sôbre a condição suficiente no final do parágrafo 11).

3.ª — **Superfície fechada.** Seja uma curva fechada (C) nas condições habituais e duas calotes de superfície apoiadas em (C) (fig. 69) e imersas no campo $\mathbf{v}(P)$ nas condições habituais também; sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ as normais exteriores a S_1 e S_2.

Aplicando a cada uma das calotes o teorema de Stokes, tem-se

$$79)\quad \int_C \mathbf{v} \,|\, d\mathbf{r} = \iint_{S_1} rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n}_1 . d\sigma = \iint_{S_2} rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n}_2 . d\sigma$$

donde

$$80)\quad \iint_{S_2} rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n}_2 . d\sigma - \iint_{S_1} rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n}_1 . d\sigma = 0.$$

Seja $S = S_1 + S_2$ a superfície fechada formada pela reünião das duas e τ o volume interior a S; como a normal $\mathbf{n}$, exterior a S, coïncide com $\mathbf{n}_2$ sôbre S_2 e é igual a $-\mathbf{n}_1$ sôbre S_1, a igualdade 80) escreve-se

$$81)\quad \iint_S rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} . d\sigma = 0$$

que exprime que *através de tôda a superfície fechada* S, *contínua e encerrando um domínio simplesmente conexo, imersa num campo vectorial* $\mathbf{v}(P)$ *uniforme, contínuo e derivável, é nulo o fluxo do rotacional do campo.*

Esta propriedade fornece uma nova demonstração da identidade $div\,rot\,\mathbf{v} \equiv 0$, visto que, pelo teorema de Ostrogradsky-Gauss, se tem $\iint_S rot\,\mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} . d\sigma = \iiint_\tau div\,rot\,\mathbf{v} . d\tau$ e o anulamento dêste integral para τ qualquer implica o anulamento idêntico da função integranda. Esta demonstração é mais geral que a dada em 6 C) por não depender do sistema particular de referência.

4.ª — **Fluxo conservativo.** Suponhamos que o campo $\mathbf{v}(P)$ é solenoidal; o fluxo é, então, *conservativo* [9, 1.ª]. É fácil exprimir o fluxo através de *qualquer* calote de superfície, apoiada num contôrno fechado (C), na circulação ao longo dêsse contôrno.

Efectivamente, de ser $div\,\mathbf{v}=0$ resulta $\mathbf{v}=rot\,\mathbf{u}$ e a igualdade 79) escreve-se

$$82) \qquad \int_C \mathbf{u}\,|\,d\mathbf{r}=\iint_S \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\,.\,d\sigma$$

que exprime que *num campo solenoidal o fluxo do vector* $\mathbf{v}$ *do campo através de qualquer calote de superfície apoiada num dado contôrno fechado* (C) *é igual à circulação do potencial-vector de* $\mathbf{v}$ *ao longo de* (C).

5.ª — **Fórmula de Riemann.** Suponhamos que o campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ está sôbre o plano Ox_1x_2 (ou lhe é paralelo) e seja, nas condições habituais, uma curva fechada (C) do plano, encerrando uma região simplesmente conexa S. É, então,

$$\mathbf{v}=X_1.\mathbf{i}_1+X_2.\mathbf{i}_2, \qquad rot\,\mathbf{v}=\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right).\mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{n}=\mathbf{i}_3,$$

$d\sigma=dx_1.dx_2$, donde, pelo teorema de Stokes,

$$83) \qquad \int_C X_1.dx_1+X_2.dx_2=\iint_S\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)\cdot dx_1.dx_2.$$

6.ª — **Teorema do gradiante.** Seja $\mathbf{v}$ um vector de direcção fixa, que se pode pôr, portanto, sob a forma $\mathbf{v}=V.\mathbf{a}$ com $\mathbf{a}$ fixo; apliquemos-lhe o teorema de Stokes; tem-se [**5**, 30)] $rot\,\mathbf{v}=rot(V.\mathbf{a})=grad\,V\wedge\mathbf{a}$ donde $\mathbf{n}\,|\,rot\,\mathbf{v}=\mathbf{n}\,|\,grad\,V\wedge\mathbf{a}=$ $=\mathbf{a}\,|\,\mathbf{n}\wedge grad\,V$; por outro lado, $\mathbf{v}\,|\,d\mathbf{r}=\mathbf{a}\,|\,(V.d\mathbf{r})$ logo, substituindo na expressão do teorema de Stokes vem [**1**, 13, 6.ª)]

$$84) \qquad \int_C V.d\mathbf{r}=\iint_S \mathbf{n}\wedge grad\,V.d\sigma.$$

7.ª — **Comparação dos teoremas de Gauss e Stokes.** Êstes dois teoremas apresentam uma semelhança curiosa de conclusões:

a) ambos estabelecem, em determinadas condições, a independência do integral pelo qual se exprimem em relação ao campo de integração (fluxo conservativo ou independência da circulação em relação ao caminho);

b) quando essa independência se verifica, é nulo o integral ao longo duma curva fechada (Stokes) ou sôbre uma superfície fechada (Gauss).

14. — **Resumo.** Seja o campo vectorial **v** (P), uniforme e contínuo, bem como as suas derivadas parciais de 1.ª e 2.ª ordem. Recordemos as seguintes *definições:*

a) *Campo solenoidal,* ou *sem fonte* (Quellenfrei) — aquele em que $div\,\mathbf{v} = 0$.

b) *Campo irrotacional,* ou *lamelar,* ou *sem turbilhão* (Wirbelfrei) — aquele em que $rot\,\mathbf{v} = 0$.

c) *Campo com potencial* — aquele em que há uma função V (P) uniforme, contínua e derivável, tal que $\mathbf{v} = grad\,V$.

Estabeleceram-se as seguintes *propriedades:*

1.ª — Todo o campo com potencial é irrotacional [6, 45)]; em todo o campo **v** (P) irrotacional existe um escalar V (P) tal que $\mathbf{v} = grad\,V$ [6, B), 2.ª].

2.ª — Todo o campo cujo vector é rotacional de outro é solenoidal [6, 46)]; em todo o campo **v** (P) solenoidal existe um vector **u** (P) (potencial-vector) tal que $rot\,\mathbf{u} = \mathbf{v}$ [6, C), 2.ª].

3.ª — Em todo o campo solenoidal é nulo o fluxo total através de qualquer superfície fechada interior a êsse campo, nas condições do teorema de Ostrogradsky-Gauss [9, 1.ª]; em todo o campo solenoidal o fluxo é conservativo [9, 1.ª]; em todo o campo solenoidal, o fluxo do vector **v** do campo através de qualquer calote de superfície apoiada num contôrno fechado (C) è igual à circulação do potencial-vector de **v** ao longo de (C) [13, 4.ª].

4.ª — O fluxo do rotacional do campo **v** (P) através duma superfície fechada S, contínua e encerrando um domínio simplesmente conexo, imerso no campo, é nulo [13, 3.ª].

5.ª — Em todo o campo que deriva dum potencial, é nula a circulação ao longo de qualquer curva fechada (C) nas condições do teorema de Ampère-Stokes [13, 1.ª]; a circulação não depende do caminho que liga dois pontos; sempre que num campo a circulação é independente do caminho, o campo deriva dum potencial [13, 2.ª].

6.ª — Um campo vectorial $\mathbf{v}(P)$ é determinado unìvocamente, numa região finita, simplesmente conexa, do espaço, limitada por uma superfície fechada e contínua, desde que se dê:

a) em cada ponto do campo, a divergência e o rotacional de $\mathbf{v}(P)$;

b) em cada ponto da superfície limitante, a componente de $\mathbf{v}(P)$ sôbre a normal exterior a essa superfície [10, unicidade].

Posto isto, os campos vectoriais podem classificar-se, em relação à sua divergência e ao seu rotacional, em quatro tipos:

a) Campos ***sem fonte*** e ***sem turbilhão***

$$div\,\mathbf{v}=0,\quad rot\,\mathbf{v}=0.$$

Existe então um escalar V tal que $\mathbf{v}=grad\,V$ e satisfazendo à equação

$$div\,grad\,V=Lap\,V=0.$$

Êstes campos dizem-se, por isso, ***campos de Laplace.***

b) Campos ***sem fonte*** e ***com turbilhão***

$$div\,\mathbf{v}=0,\quad rot\,\mathbf{v}\neq 0.$$

c) Campos ***com fonte*** e ***sem turbilhão***

$$div\,\mathbf{v}\neq 0,\quad rot\,\mathbf{v}=0.$$

d) Campos ***com fonte*** e ***com turbilhão***

$$div\,\mathbf{v}\neq 0,\quad rot\,\mathbf{v}\neq 0.$$

Neste caso é sempre possível decompôr o campo em dois dos tipos *b)* e *c)*. Efectivamente, se fôr $div\,\mathbf{v}=r$, $rot\,\mathbf{v}=\mathbf{s}$, pode fazer-se $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ com

$$\begin{cases} div\,\mathbf{v}_1=0 \\ rot\,\mathbf{v}_1=\mathbf{s} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\,\mathbf{v}_2=r \\ rot\,\mathbf{v}_2=0. \end{cases}$$

15. — Bibliografia.

Max Lagally — *Vorlesungen über Vektor-Rechnung*. Leipzig, 1928.
C. E. Weatherburn — *Advanced Vector Analysis*. Londres, 1928.
W. Ignatowsky — *Die Vektoranalysis* (Vol. 1.°). Berlim, 1926.
C. Burali-Forti e R. Marcolongo — *Éléments de Calcul Vectoriel* (tradução francesa). Paris, 1910.
G. Bouligand — *Leçons dè Géométrie Vectorielle*. Paris, 1924.
R. Bricard — *Le Calcul Vectoriel*. Paris, 1929.
G. Juvet — *Leçons d'Analyse Vectorielle* (Vol. 1.°). Paris, 1933.
A. Véronnet — *Le Calcul Vectoriel (Cours d'Algèbre)*. Paris, 1933.
S. Valentiner — *Vektoranalysis*. Leipzig, 1929.

Obras gerais

J. Hadamard — *Cours d'Analyse* (Tomo 1.°). Paris, 1927.
C. Jordan — *Cours d'Analyse* (Tomo 2.°). Paris, 1913.
R. Courant — *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (Vol. 2.°). Berlim, 1931.
R. Garnier — *Cours de Mathématiques Générales* (Vol. 2.°). Paris, 1931.
M. A. Buhl — *Nouveaux Éléments d'Analyse* (Tomo 1.°). Paris, 1937.

Exercícios

1. — Calcular

a) $grad\, U$ para $U = log\,(x^2 + y^2 + z^2)$

b) $div\,(grad\, U \wedge grad\, V)$

c) $\mathbf{u} \,|\, rot\, \mathbf{u}$ onde $\mathbf{u}$ é dado pela relação $\rho\,.\,\mathbf{u} = grad\, V$ (ρ, $\mathbf{u}$ e V funções de ponto).

2. — Sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dois vectores constantes, $\mathbf{r} = P\,(x_k) - O$, $r = mod\,\mathbf{r}$, mostrar que

$$\mathbf{a} \,|\, grad\left(\mathbf{b} \,|\, grad\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{a} \,|\, \mathbf{b} + \frac{3}{r^5} \cdot (\mathbf{a} \,|\, \mathbf{r})\,.\,(\mathbf{b} \,|\, \mathbf{r}).$$

3. — Dado um vector solenoidal $\mathbf{u}$, mostrar que

$$rot\, rot\, rot\, rot\, \mathbf{u} = Lap\; Lap\; \mathbf{u}\,.$$

4. — Seja S uma esfera de centro em O e raio r, P o ponto corrente da superfície esférica, $\mathbf{r} = (P - O)$, $r = mod\,\mathbf{r}$;

a) calcular $\iint_S \mathbf{r} \,|\, \mathbf{n} \,.\, d\sigma$ sôbre a superfície esférica;

b) verificar, em relação a essa esfera, o teorema do fluxo para o vector $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

5. — Dada uma superfície fechada S e três vectores **u**, **v**, **w** tais que $\mathbf{w} = \dfrac{1}{2} \cdot rot\,\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} = rot\,\mathbf{u}$, mostrar que

$$\frac{1}{2} \iiint_\tau (mod\,\mathbf{v})^2 \,.\, d\tau = \iiint_\tau \mathbf{u} \,|\, \mathbf{w} \,.\, d\tau + \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} \,.\, d\sigma \,.$$

6. — Dada uma calote de superfície S, limitada por um contôrno fechado (C), e as funções de ponto U e **v**, mostrar que

$$\iint_S U \,.\, \mathbf{n} \,|\, rot\,\mathbf{v} \,.\, d\sigma = \int_C U \,.\, \mathbf{v} \,|\, d\mathbf{r} - \iint_S grad\,U \wedge \mathbf{v} \,|\, \mathbf{n} \,.\, d\sigma \,.$$

7. — Utilizando o resultado do exercício anterior, exprimir o fluxo do vector $\mathbf{w} = grad\,U \wedge grad\,V$ através de S, numa circulação ao longo de (C).

8. — Seja um campo vectorial uniforme $\mathbf{v}\,(P)$, irrotacional; define-se um campo escalar do modo seguinte: tomado um ponto fixo O, ao qual se liga o número zero, a cada ponto M faz-se corresponder o valor da circulação de $\mathbf{v}$ (P) ao longo dum caminho ligando O a M. Estudar, do ponto de vista da uniformidade, e das relações com $\mathbf{v}\,(P)$, o campo escalar assim definido.

ÍNDICE DE NOMES

(Os números referem-se às páginas)

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATÉRIAS

(Os números referem-se às páginas)

ERRATA

Pg.	*Linha*	*Onde se lê*	*Leia-se*
132	5	$x^1 = \varphi_1(u)$	$x_1 = \varphi_1(u)$
136	última	uma conseqüência	é uma conseqüência
220	5 (a contar de baixo)	$\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial V_2} = 0$	$\frac{\partial^2 F}{\partial U^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = 0$
255	3 (a contar de baixo)	no segundo membro da igualdade leia-se $-\frac{1}{r^3}\cdot \mathbf{a}\,|\,\mathbf{b} + \frac{3}{r^5}\cdot(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{r}).(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{r}).$	

TÁBUA DE MATÉRIAS

Acabou de se imprimir aos
30 de Agosto de 1937, na
Sociedade Industrial de Tipografia, L.ª, Rua Almirante
Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo),
LISBOA — PORTUGAL

Acabou-se de imprimir aos
30 de Agosto de 1939, na
Sociedade Industrial de Ti-
pografia, L.da, Rua Almirante
Pessanha, 5–Largo Carmo,
LISBOA — PORTUGAL