48

Tratado

171 dos principios da Trigonometria Esferica.

Deffiniçoẽs

1 Angulo esferico he aquelle q̃ na superficie da esfera formaõ dous arcos de circulos maximos q̃ reciprocam.te se cortaõ hum ao outro. Clavio Trig. esf. dif. 1a.

2 Triangulo esferico he aquelle q̃ na superficie da esfera formaõ tres arcos, ou pedassos de circulos maximos, q̃ concorrendo huns com outros se juntaõ em tres pontos, onde formaõ tres ang.os. Onde se advirta q̃ em hum triang.o esferico naõ pode entrar arco de circulo menor. Clav. dif. 5a.

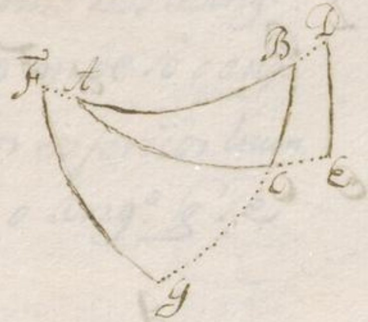
3 A medida de hum ang.o esferico Clav. dif. 6a.

se

se regula pella grandeza de hum arco
ou pedasso de Circulo maximo descripto
pellas extremidades dos arcos q̃ for-
mão o mesmo ang.º Continuados athe
quadrantes, de modo q̃ fique o ang.º
q̃. se quer medir sendo polo do mes-
mo Circulo q̃ o mede.

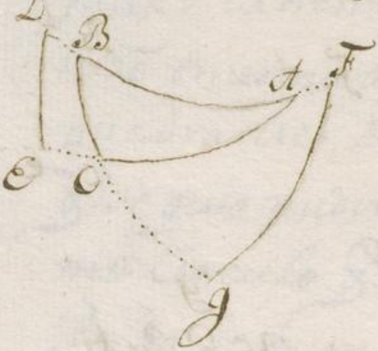
Polos de hum circulo na esfera
são os dous pontos mais remotos
do mesmo circullo hum p.ª hua p.te
outro p.ª outra, de modo q̃ a li-
nha recta q̃. se imagginar tirada de
hum polo athe o outro seja perpen-
dicular sobre o centro, e sobre o pla-
no do mesmo Circulo da qui se
segue q̃. hum circulo menor terá
os seus polos hum mais distan-
te delle q̃. 90 gr. e o outro me-
nos distante de 90 gr. porem os
polos de qualquer circulo maxi-
mo

sempre distão delle 90 gr. hum pr.º hũa
pte, e outro pr.º a outra.



Seja por exemplo o
triang.º ABC dog.l
se quizermos saber
por exemplo a gran-
deza do ang.º A. não
diremos q. a mede o arco BC q. lhe fi-
ca oposto, porq.to o tal arco não tem o seu
polo no ponto A, e por isso não pode
ser medida do ang.º q. nelle se for-
ma, mas he necess.º descrever hum
circulo maximo do ang.º A como polo
pr.º o q. se devem continuar o arco
AB athe 90 gr. isto he athe D, e o
arco AC athe E, e então o arco
DE, q. he hum pedaço do circu-
lo, q. do ponto A como polo foy
descrito, e fica incluido entre os
arcos

arcos AD, e AE. sera a medida do angº A, e quantos gr. tiver o tal arco tan-



tos diremos q̃ tem o angº.: do mesmo modo se quizermos saber q.tos gr. tem o angº B. sera necess.º continuar os arcos BA, e BC athe quadrantes isto he BA athe F, e BC athe G. entaõ o arco FG. q̃ passa pellos extremos dos ditos quadrantes sera a medida do angº B.

Advirtase q̃. assim como p.ª descrever hum circulo em hum plano he necess.º por hua perna do Compasso no Centro, e com a outra descrever a circumferencia, assim na esfera he necess.º por a perna do Compasso naõ

no

no Centro, mas em hum dos polos do
circulo onde assim como nos triang.^{os}
rectilinios hum arco mede só o ang.^o
feito no seu centro, nos esfericos hum
arco só pode medir o ang.^o q̃ se
fizer no seu polo.

Propriedades

1 Na esfera todos os circ.^{os} maximos se cortaõ huns aos outros reciproca-m.^{te} em duas metades iguaes de modo q̃ qualquer circulo maximo corta á todos os outros, e he delles cor-tado em dous semicircul.^{os}, e as aves-sas se dous circulos na esfera se cor-tarem hum ao outro reciprocam.^{te} pello meyo seraõ maximos. Esfericos de Theodosio pro-pos. 11, e 12.

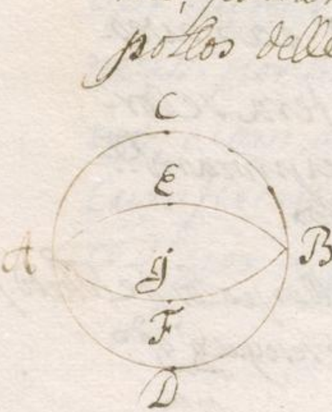
2 Todo o circ.^o q̃ na Esfera passa pellos polos de outro corta-o em ang.^{os} rectos donde se segue q̃ 2.^{do} Theod. prop. 15

pro.

p.ª se saber a grandeza de hum ang.º
Como o ang.º C continuamos os arcos

CA athe D, e CB athe E
isto he athe quadrantes
p.ª q. o arco DE q. passa pel-
los seus extremos seja a
medida do tal ang.º C. os dittos arcos
CD, e CE cortão ao arco DE, e são delle
cortados em ang.os rectos, e portanto
o ang.º D, e o ang.º E são rectos.

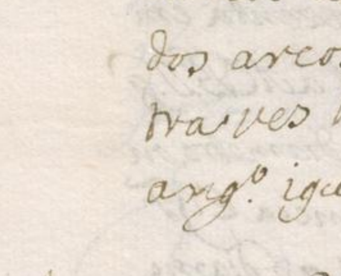
3 Se hum circ.º maximo na esfera pas-
sar pellos pollos de outro circ.º maxi-
mo, passara tambem este pellos seus
pollos delle. seja o circ.º maximo AC-
BD q. passa pellos pontos
CD pollos do outro circ.º
maximo AEBF, passara
portanto este tambem pel-
los pontos, E, e F, polos do circ.º
ACBD



porq. posto q̃ vejamos q̃ este circ.º A.
C.B.D foy descripto do ponto G. he por-
q̃ no plano se naõ podem repre-
zentar os circ.os como na esfera por-
q.to na esfera o ponto G. centro do circ.º
havia de ser tambem o centro da es-
fera, e por tanto ficar occulto, e p.ª
se descrever o d.º circ.º A.C.B.D. puri-
amos a perna do Compasso naquelle
ponto q̃. ficasse mais distante do mes-
mo circ.º, e perpendicular sobre o seu
plano, que vem a ser o ponto E, ou
o ponto F q̃. assim se reprezenta em
plano o circ.º A.E.B.F. igual a A.C.B.D. q̃
o corta em ang.os rectos, e o diametro, ou
eyxo do circ.º A.E.B.F. he a distancia E.G.F.
q̃. na esfera hade ser igual ao diame-
tro, ou eyxo do circ.º A.C.B.D., isto he a
distancia de C athe D., e se cruzavaõ em
ang.os

Ang.os Rectos os dous diametros no Cen-
tro ou ponto G. posto q̃ nesta projecção
nos pareça coincidir na mesma L.a
o eyxo CD, e o eyxo EF.

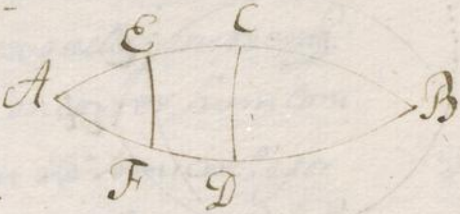
4 Se os dous arcos q̃ formaõ hum ang.o
esferico se continuarem, irseháõ alar-
gando athe distarem 90 gr. do
mesmo ang.o, e ahi seraõ os
pontos em que mais se afastem
os dittos arcos hum do outro, mas da-
hi por diante irseháõ outra ves jun-
tando athe q̃. chegando cada hum
dos arcos a semicirc.o concorraõ ou-
tra ves hum com outro, e formem hum
ang.o igual ao ang.o em q̃. principiaraõ



Sejaõ os arcos AE, e AF q̃ for-
maõ o ang.o A se produzir-
mos estes arcos vemos q̃ se

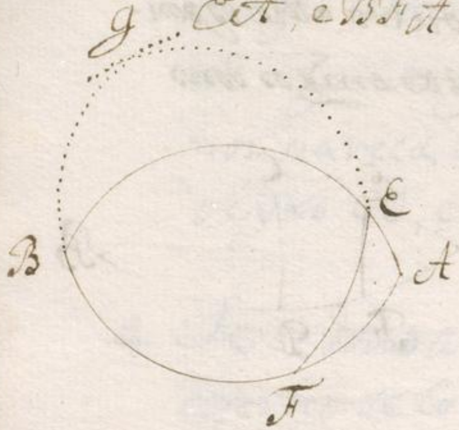
raõ

vaõ afastando hum do outro athe os pontos C, e D, q. saõ os pontos em q os dous arcos A C, e A D chegaõ a distar do ang.º A por 90 gr., e q. dahi se tornaõ a ir juntando athe q chegando ao ponto B em q cada hum delles chega a simicirc.º formaõ o ang.º B igual ao ang.º A, e ficaõ os dous pontos A, e B sendo polos do arco C D q he a medida de cada hum dos ang.os q. nos dittos pontos se formaõ.



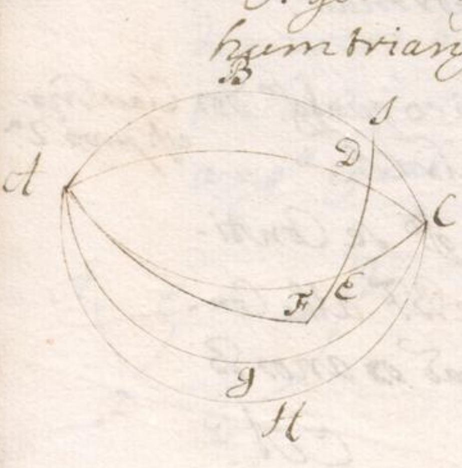
5 Em todo o triang.º esferico qualq.r dos lados he menor q. simicirc.º. Clav. Trig. cf. prop. 2.ª

Seja o triang.º B E F por q.to se continuarmos os lados B E, e B F athe concorrerem no ponto A seraõ os arcos B E A



CA, e BFA semicirc.os porq̃ os circ.os maximos se cortaõ reciprocam.te pello q̃ tanto o arco BE, como BF será menor q̃ semicirc.o. Do mesmo modo de qualq.r dos outros ang.os por exemplo F produzidos os Lados FB, e FE iraõ concorrer no ponto G tanto q̃ chegarem a semicirc.o. por tanto qualq.r delles será menos q̃ semicirc.o.

Agora suponhamos querer formar hum triang.o em q̃ seja hum lado semicirc.o por exemplo AB C ou qualq.r outro, por q̃ os extremos do semicirc.o saõ diametralm.te opostos, quaisq.r dous arcos q̃ delles sahirem



rem q.do se juntar em hum ponto da esfera Como os arcos AD, CD, ou AE, CE, ou AG, CG, não poderão os tais dous arcos formar ang.o naquelle ponto em q. juntão, mas hão de Concorrer hum com outro, e formar hum só simicirc.o e portanto Com o pr.o simicirc.o ABC farão hũa fig.a de dous Lados, e dous ang.os porem se com o arco AI menor q. simicirc.o quizermos formar o triang.o então aqualq.r ponto da esfera q. se vão juntar os dous arcos AF, e IF tambem menores q. simicirc.os formarão o triang.o AIF.

6 Em todo o triang.o esferico sempre quais q.r dous Lados são mayores q. o terc.o o mesmo he nos triang.os rectilineos. Clav. prop. 3.a

7 Em qualq.r triang.o esferico os tres Lados Clav. prop. 4.

juntos

juntos saõ menores q. a circunferencia de hum Circ.o

Por Causa da brevid.e deyxo as demonstraçoẽs desta duas proporçoẽs

8 Quando na Esfera cahé hum arco de

Clav prop.e 5.a Circ.o maximo sobre outro Circ.o maximo fas com elle dous ang.os ou rectos, ou iguaes a dous rectos; do mesmo modo q. q.do hũa L.a recta cahé sobre outra Linha recta.

Seja AB hum arco de circ.o maximo q. cahé sobre outro arco de Circ.o max.o CD. se o tal arco AB passar pellos polos do arco CD Cortará o arco CD em ang.os rectos, e por tanto o ang.o ABD, e mais o ang.o ABC seraõ rectos, e entre si

iguaes

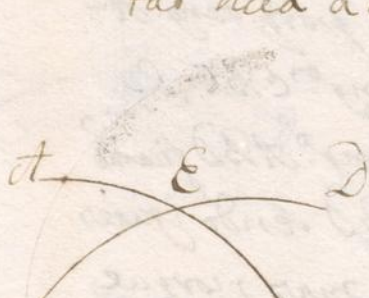
iguaes; porem se o arco AB não passar pellos polos de CD serão os dous angos q̃ com elle fas obliquos, a saber hum agudo, e outro obtuso, porem ambos iguaes a dous rectos, p.ª demonstração tirese o Arco EB q̃ passe pellos polos do arco CD, serão logo os ang.os EBC, e EBD rectos, porem porq̃ o ang.º ABD, e mais o ang.º ABE são ambos juntos iguaes ao ang.º recto EBD, se lhe juntarmos o ang.º recto EBC ficarão os tres ang.os ABD, ABE, e CBE iguaes a dous rectos, do mesmo modo porq̃ o ang.º ABC he igual aos dous ang.os EBC, e EBA se juntarmos o ang.º ABD ficarão os dous ang.os ABC, e ABD sendo iguaes aos tres EBC, EBA, ABD, mas porque estes tres são iguaes a dous rectos, e os dous obliquos são iguaes a estes tres Logo

os

os dous obliquos serão iguaes a dous rectos
porq. q.do duas Couzas diversas são
iguaes a hũa terc.a são tambem iguaes
entre si; e assim porq. vimos q. tanto
os dous ang.os obliquos ABC, e ABD Como
os dous rectos CBC, e CBD, erão iguaes
aos tres CBC, CBd, e ABD. Concluire-
mos q. são entre si iguaes.

9 Clav. prop. 6a Se dous arcos de circ.os max.os se Corta-
rem reciprocam.te hum ao outro farão
os ang.os no vertice iguaes entre si.

O mesmo he q.do ~~[illegible]~~ L.as rectas se cor-
tão hũa a outra.

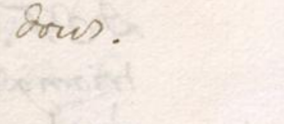


Corte o arco AB o arco CD
no ponto E serão os ang.os
no vertice iguaes a saber
o ang.o AEC, igual ao ang.o
DEB, e o ang.o AED i-
gual a CEB porq. se
os

os ang.os AED, e DEB saõ iguaes a
dous rectos como tambem os ang.os
DEB e BEC saõ iguaes a dous rectos se-
raõ aquelles dous iguaes a estes dous
Logo se tirarmos o ang.o DEB q. jun-
to a qualq.r dos outros dous faria com
elle dous rectos, ficaraõ os outros
dous sendo entre si iguaes, a sa-
ber AED, e CEB do mesmo modo se
mostra a igualdade dos outros dous.

10 Em qualq.r triang.o esferico como Clav. prop.
nos rectilineos o mayor lado subten- 11
de o mayor ang.o, e o menor tambem
o menor.

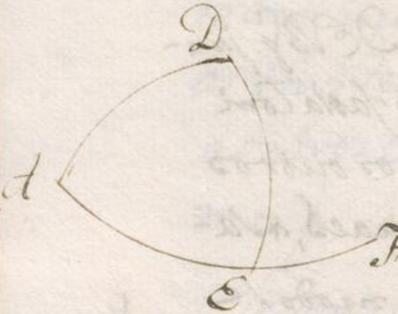
11 Os tres ang.os de qualq.r triang.o es- Clav. prop.
ferico sempre saõ mayores q. dous rec- 32
tos, e menores q. seis. daqui se infere q.



Em

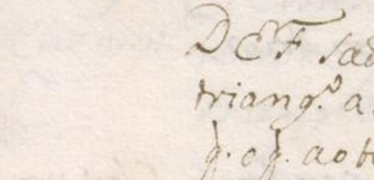
Em qualq.r triang.o esferico quaisq.r dous an-
g.os sempre saõ mayores q. o q. ao terc.o fal
ta p.a hum semicirc.o isto he p.a 180 gr.

Portanto se em qualq.r triang.o esferico
continuarmos hum lado como no triang.o



A D E o lado A E athe F o ang.o
exterior a saber D E F sera menor
q. a soma dos dous interiores
opostos a saber A D E, e D A E
por q. se os dous ang.os D E A e
D E F saõ iguaes a dous rectos, e em hum
triang.o a soma de quaisq.r dous he mayor
q. o q. ao terc.o falta p.a dous rectos, sendo
o ang.o D E F o q. a o ang.o D E A falta p.a dous
rectos sera a soma dos outros dous mayor
q. o ang.o D E F

Naõ sucede assim nos rectilineos porq.
como a soma dos tres ang.os he igual
a dous rectos q.do em qualq.r triang.o



produzirmos hum lado A E athe F
sempre o ang.o exterior D E F he
igual â soma dos dous

in

interiores, e opostos a saber ADE, e DAE

13 Nos triang.os esfericos rectang.os os dous lados q. formaõ o ang.o recto saõ da mesma qualid.e q. os ang.os a elles opostos, isto he q. q.do algum dos lados for quadrante será tambem o outro ang.o oposto recto, e q.do for mayor q. quadrante, será tambem o ang.o oposto mayor q. recto, e q.do for menor será tambem o angulo oposto menor. Naõ se segue daqui q. o ang.o obliquo seja igual ou de tantos gr. como o lado oposto, so sim q. se o lado exceder de 90 gr. excederá tambem o ang.o oposto, e se o lado naõ chegar a 90 gr. será o ang.o oposto agudo. Clav. prop.

Quando nos triang.os rectang.os se falla em lados entendem-se os dous q. formaõ o ang.o recto, porq. aquelle q. lhe fica oposto se chama especialm.te hypotenusa, posto q. em qualq.r triang.o os tres arcos, ou tres lad.os q. formaõ mão a fig.ª se chamem lados della.

14 Nos triang.os esfericos rectang.os se hum la
Clav. prop. 35 do como AB for quadrante será tam-
bem a hypotenusa AC quadrante, e

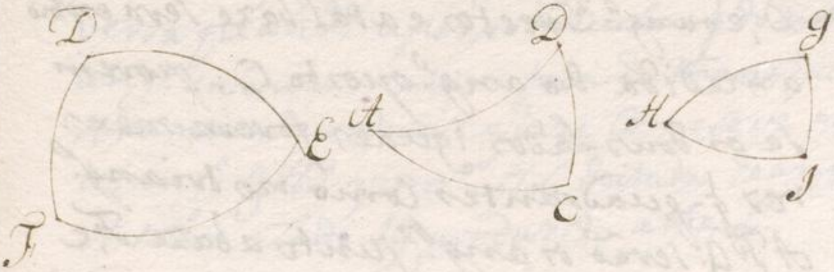
daqui se segue q o triang.º es-
ferico q. tiver hum ang.º rec-
to, e hum lado de 90 gr. te-
va forçozam.te dous ang.os rec-

tos, e dous lados de 90 gr.
porq. se os dous lados AC
C AB forem quadrantes será o ang.º A
polo do arco CB, e por tanto serão rec-
tos os ang.os C, e B.

15 Nos triang.os esfericos rectang.os se os dous
Clav. 37, e 38 lados junto ao ang.º recto forem da mesma
qualid.e isto he se ambos forem mayores
que quadrantes como no triang.º
DEF, ou ambos menores como

no

no triangulo GHJ, será sempre a hypotenuza DF, e GH menor q. quadrante porem se os ~ dos forem de diversa qualidade isto he se for hum mayor, e outro menor q. quadrante como no triang.º ADC será a hypotenuza AD mayor q. quadrante.



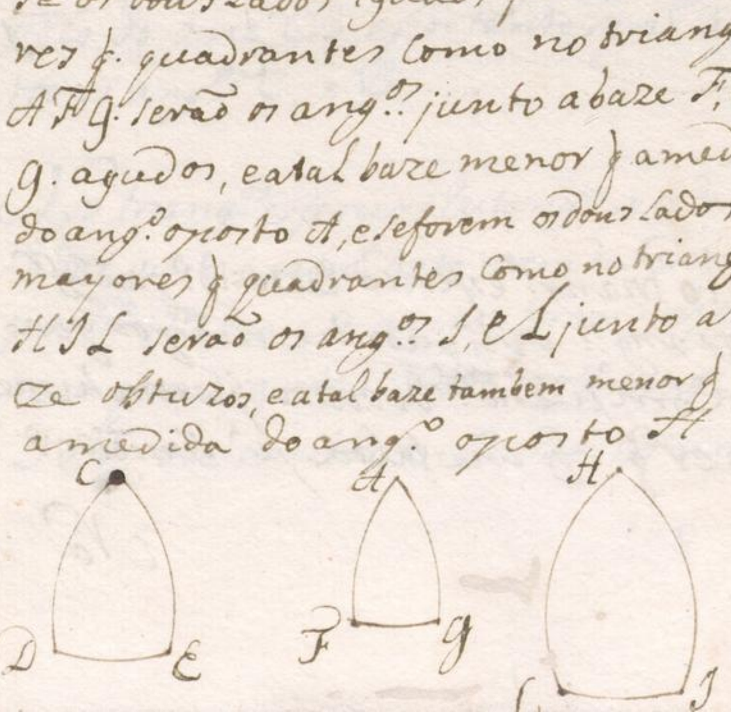
16 No triang.º esferico rectang.º qualq.r dos ang.os obliquos he mayor que o complem.to do outro, porem he menor q. os 90 Me falta p.a simicirc.º

No

17 No triang.º esferico obliquang.º se Cada hum dos ang.os for agudo será tambem Cada hum dos Lados menor que quadrante.

18 Nos triang.os esfericos Isçoceles se os dous Lados iguaes forem quadrantes Como no

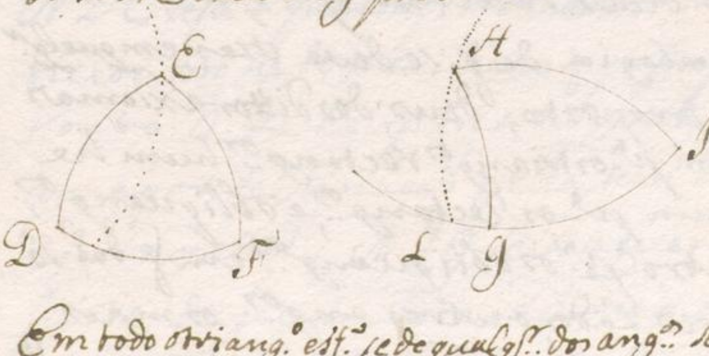
Clav. prop. 25 triang.º DCE os Lados DC, e EC, serão os dous ang.os junto a baze, a saber o ang.º D, co ang.º E rectos, e a tal baze será então a medida do ang.º oposto C; porem se os dous Lados iguaes forem menores q. quadrantes Como no triang.º AFG. serão os ang.os junto a baze F, e G. agudos, e a tal baze menor q. a medida do ang.º oposto A, e se forem os dous Lados mayores q. quadrantes Como no triang.º HIL serão os ang.os I, e L junto a baze obtuzos, e a tal baze tambem menor q. a medida do ang.º oposto H



tam

tambem as avessas se os dous ang.os iguaes junto a baze forem rectos serão os lados oposto quadrantes, e se forem agudos serão os lados opostos menores q. quadrantes, e se obtuzos, mayores.

19 Em qualq.r triang.o esferico obliquang.o se os dous ang.os junto ao lado q se tomar por baze forem da mesma qualid.e isto he, ou ambos agudos, ou ambos obtuzos como no triang.o DEF a perpendicular q do outro ang.o se lançar sobre a baze cahira dentro do triang.o porem se forem os ang.os junto a baze de diversa qualid.e a perpendicular q do outro ang.o se lançar cahira fora do triang.o p.a o q sera necess.o produzir a baze como se ve no triang.o GHI a perp.ar HL deitada do ang.o H sobre o lado IG produzido athe L.



20 Em todo o triang.o esf.o se de qualq.r dos ang.os se continuarem os lados athe simicirc.os fica formado outro triang.o no q.l o ang.o do concurso dos simicirc.os he igual ao ang.o do pr.o triang.o, e o lado oposto a elle tambem o mesmo q. o lado oposto ao do pr.o porem os outros dous lados, e dous ang.os serão os complem.tos dos do pr.o p.a simicirc.os.

No triang.º ABC se desde o ang.º A D se continuarem os Lados AB, e AC athe simicirc.os formarão o triang.º BDC oposto ao triang.º ABC, no qual o ang.º D será igual ao ang.º A do pr.º, o lado BC será o mesmo em hum triang.º q̃ em outro, o Lado BD será o Complem.to p.ª simicirc.º do Lado AB, o Lado CD o Complem.to p.ª simicirc.º do Lado AC, o ang.º DBC o Complem.to p.ª simicirc.º do ang.º ABC, o ang.º BCD o Complem.to p.ª simicirc.º do ang.º BCA, e assim sabidas as partes de hum triang.º ficão Conhecidas as do outro.

A solução dos triang.os esfericos depende som.te da aplicação de algum de quatro axiomas principaes os quais são bastantes p.ª por meyo delles se achar a proporção ou annalogia de q̃. se deve uzar em qualq.r cazo proposto; dous dos dittos axiomas servem p.ª os triang.os rectang.os hum he Comum p.ª os rectang.os, e obliquang.os, e outro p.ª os obliquang.os em q̃. dão só ou tres Lados, ou tres ang.os, os mais obliquang.os se reduzem ordinariam.te a dous rectang.os por meyo de hũa perp.ar

Axio-

Axioma Primr.º

Em todos os triangºs esfºs rectangºs q̃ tiverem o mesmo angº agudo junto a baze são proporsionaes os senos das hypotenuzas com os senos das perpendicculares.

Seja na fig. q̃. reprezenta a quarta ptᵉ da espera, o simi circº MCO a metade da equinoccial desde o primcipio de ♈ athe ♎ o ponto N seja o pollo da equinoccial, o simi circº OSDM reprezᵗᵉ a metade da eclyptica tambem desde ♈ athe ♎, NDC seja a quarta ptᵉ do coluro dos solsticios isto he do meridiano q̃. passa pello ponto D. da eclyptica no qual he a maior declinação q̃ ella tem da equinoccial; NSG seja a quarta parte de hum meridiano que parte por qualqr. ponto dado na

Eclypt

eCliptica, o qual do mesmo modo q̃ o Colurvo dos Solsticios, cortará tambem a equinoccial em ang.os Rectos no ponto G.
Como todos os mais quadrantes, q̃ sahirem do seu polo N. porem â Ecliptica corta-la-a em ang.os obliquos no ponto I, porque dos meridianos só o Colurvo dos Solsticios corta a Ecliptica em ang.os rectos por passar pellos seus polos, todos os mais em ang.os obliquos.
Nesta quarta p.te da esfera temos formado dous triang.os esfericos rectangulos a saber o triang.o ODC, e o triang.o OIG dos quais a hipotenuza do pr.o he OD, e a do seg.do OI, as perpendiculares, do pr.o DC, do seg.do IG, e as bazes do pr.o OC, do seg.do OG. o ang.o agudo junto as bazes he DOC em hum, IOG em outro, agora o seno da hypotenuza OD he o radio AD, e o seno da

hypo

hypotenuza OI he a L.ª recta IP, q. sahe do extremo I e cahe perpendicularm.te sobre o Radio AO q passa pello outro extremo O. O seno da perp.ar DC he a recta DB, e o da perp.ar IG he a recta IH que sahe do extremo I, e cahe sobre o Radio AG q passa pello outro extremo G. saõ portanto proporcionaes as hipotenuzas AD, PI com as perpendiculares DB, IH o q. se prova pella prop. 4.ª do 6.º de Euclides porq. os triang.os rectilineos ADB, e PIH saõ semilhantes por serem os ang.os de hum iguaes aos ang.os de outro.

Portanto saõ proporcionaes

Seno. AD. da hypot. OID	Seno AD da hypot. OID
Seno DB. da perp. DC	Seno PI da hypot. OI
Seno. PI da hypot. OI	Seno DB da perp. DC
Seno IH da perp. IG	Seno IH da perp. IG

ou

ou tambem

Seno PI da hypot. OI	Seno PI da hypot. OI
Seno AD da hypot. OID	Seno IH da persp. IG
Seno IH da persp. IG	Seno AD da hypot. OID
Seno DB da persp. DC	Seno DB da persp. DC

E as avessas saõ proporcionaes

Seno DB da persp. DC	Seno DB da persp. DC
Seno IH da persp. IG	Seno AD da hypot. OID
Seno AD da hypot. OID	Seno IH da persp. IG
Seno PI da hypot. OI	Seno PI da hypot OI

Seno IH da persp. IG.	Seno IH da persp. IG
Seno DB da persp. DC	Seno PI da hypot. OI
Seno PI da hypot. OI	Seno DB da persp. DC
Seno AD da hypot OID	Seno AD da hypot. OID

Axioma seg.do

Em todos os triang.os esf.os rectang.os q̃ tiverem o mesmo ang.o agudo junto a baze saõ proporcionaes os senos das bazes com as Tangentes das perpendicula.res.

Na mesma fig.a e nos mesmos triang.os esf.os ODC, e OIG o seno da baze OC he o radio AC, e o seno da baze OG he a recta PG, q̃ sahe do extremo G, e cahe aprumo sobre o radio AO q̃ passa pello extremo O. porem a Tang.te da perp.ar DC he a recta EC, e a da perpendicular IG he a recta LG, e por q̃ do mesmo modo q̃ na demonstraçaõ passada he o triang.o AEC simillhante ao triang.o PLG seraõ proporcionaes os Lados de hum aos Lados de outro.

portanto saõ proporcionaes

Seno AC da baze OC	Seno AC da baze OC
Tang. EC da perp. DC	Seno PG da baze OG
Seno PG da baze OG	Tang. EC da perp. DC
Tang. LG da perp. DG	Tang. LG da perp. DG

ou tambem

Seno PG da baze OG	Seno PG da baze OG
Tang. LG da perp. DG	Seno AC da baze OC
Seno AC da baze OC	Tang. LG da perp. DG
Tang. EC da perp. DC	Tang. EC da perp. DC

e as aversas

Tang. EC da perp. DC	Tang. EC da perp. DC
Seno AC da baze OC	Tang. LG. da perp. DG
Tang. LG da perp. DG	Seno AC da baze OC
Seno PG da baze OG	Seno PG da baze OG

ou tambem

Tang. da perp. DG	Tang. da perp. DG
Seno da baze OG	Tang. da perp. DC
Tang. da perp. DC	Seno da baze OG
Seno da baze OC	Seno da baze OC

Do

Da acomodação destes dous axiomas depende a solução de qualq.r triang.o esferico rectang.o; e assim p.a se poder aplicar algũas destas proporcoẽs he neces.o continuar os lados do triang.o q. se quer soltar athe quadrantes p.a q. fique formado outro triang.o em q. conhe-camos os dous lados de 90 gr. a saber a baze, e hypotenuza continuadas athe quadrantes, e q. fique tendo o mesmo ang.o agudo junto a baze, q. tem o triang.o proposto como logo vere-mos.

Advertencia

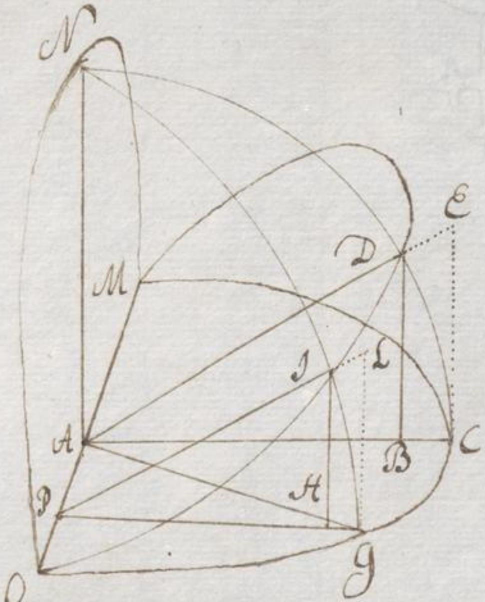
Todos os cazos da trigonometria se soltão pellos senos, e tangentes sem q. seja neces.a a intervenção das secantes po-rem por mais abundancia se costumão trazer as taboadas das secantes nos livros de senos, e tangentes porq. p.a a solução

de

de qualqr. triango. pode haver mtas. e di-
ferentes annalogias, ou proporcoẽs q.
todas venhaõ a dar o mesmo eqdo.
virmos pa. a soluçaõ de qualqr. tri-
ango. uzar de diferente proporçaõ, naõ
entenderemos q. he errada.

Pa. qualqr. proporçaõ porq. se solta hum
triango. se poder variar de mtos. modos he
necesso. conhecer algũas propiedes. das Las.,
senos, Tangentes, e secantes, e proporcoes q.
hũas tem com outras, pa. oq. as trazem
os Livros de trigonometria, e nos escre-
veremos algũas depois da pratica da
trigonometria, e so aqui de passage
veremos na mesma figa. q. saõ tam-
bem proporcionaes as secantes das
perpendiculares como os senos das
bazes, porq. nos triangos. rectilineos
AEC e PLG he a bertha AE
secante da perp. DC, e a La. PL secan-

te


N
M
D
E
I
L
A
B
C
H
P
O
G

te da perp. IG, e portanto saõ proporcionaes

Seno PG da baze OG .... Seno AC da baze OC
Secte. PL da perp. IG .... Secte. AE da perp. DC
Seno AC da baze OC ... Seno PG da baze OG
Sec. AE da perp. DC ... Secte. PL da perp. IG

Ear avessas

Secante AE da perp. DC
Secante PL da perp. IG
Seno AC da baze OC
Seno PG da baze OG

Etc.

Destes dous axiomas, e da sua declaracaõ, e demonstracaõ se conhece a cauza porq. os senos das bazes naõ tem Correspondencia Com os senos das perpendiculares nem os senos da hypotenuzas com as tangtes. das perpendiculares, ou as avessas a saber porq. nos triangos. rectilineos naõ

Conco-

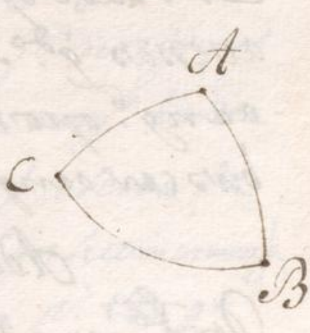
Concorrem no mesmo ponto os senos das bazes com os senos das perpendicularer, nem os senos das hypotenuzas com as tangtes das perpendiculares, porq. V.g. no triang.o AD.B em q. a L.a AD he seno da hypotenuza OD a L.a DB q. he seno da perpendicular DC não concorre com o extremo do seno da baze mas cahe sobre o meyo della no ponto B; e a L.a AB não he seno da baze, mas menor q. elle, e só com a L.a EC q. he tang.te da perpendicular pode o seno da baze AC ter correspondencia por se juntarem hũa e outra nos seus extremos, e formarem o triang.o AEC porem os senos das bazes assim como tem correspondencia com as Tang. das perdiculares vemos q. a podem tambem ter com as sectes das perpendiculares.

Axioma 3.º

Em qualquer triang.º saõ proporcionaes os senos dos lados com os senos dos ang.os opostos.

Deixada a demonstraçaõ deste axioma q. se deduz do prim.º p.ª os q trataõ a trigonometria mais difuzamente serve a accomodaçaõ delle p.ª a soluçaõ de qualquer triang.º ou seja rectang.º ou obliquang.º em q. se der sabido hum ang.º com hum lado oposto, e mais, ou ang.º oposto a lado buscado, ou lado oposto a ang.º buscado, porq.to por exemplo no triang.º ABC saõ

proporcionaes
- Seno do ang.º A
- seno do lado CB oposto
- seno do ang.º C
- seno do la AB oposto
- seno do ang.º B
- seno do lado CA oposto



ou tambem

seno do ang.º A
seno do ang.º B
seno do lado BC oposto ao prim.º
seno do lado AC oposto ao seg.do

ou principiando pellos lados

seno do lado BC
seno do ang.º oposto A
seno do lado AB
seno do ang.º oposto C

seno do lado BC
seno do lado AB
seno do ang.º A
seno do ang.º C

E assim q.do soubermos dous ang.os e o lado oposto a hum delles poderemos buscar o lado oposto ao outro ang.º. Ou as avessas q.do soubermos dous lados, e o ang.º oposto a hum delles poderemos buscar o ang.º oposto ao outro lado.

Advertencia

Por q.to nas taboadas do senos o mayor

seno

Seno he o Radio ou Seno de 90 gr. e
m.tas vezes succede haver em hum
triang.o Lados mayores q quadrante,
e ang.os obtuzos, e sempre os Senos
delles são menores, q. o Seno de 90
gr. he necessario q.do investigarmos
hum Lado ou hum ang.o ter primr.o
Conhecido se he mayor, ou menor q
quadrante o tal Lado, ou ang.o bus-
cado, o q. se sabe pello Conhecim.to
das propriedades dos triang.os q. temos
escrito, e q.do o ang.o ou arco bus-
cado for mayor de 90 gr. sera ne-
cessario o arco ou ang.o q. achar-
mos tiralo de 180 gr. p.a nos ficar
o verdadeiro arco ou ang.o busca-
do mayor q. 90 gr. porq. o Seno de
hum arco mayor de 90 gr. he o mesmo q.
o Seno do arco q. lhe falta p.a 180 gr.

O axio

O Axioma quarto q̃ serve p.ª a so-
luçaõ daquelles triangulos obli-
quangulos em que sabidos sô
tres lados se busca hum ang.º;
ou sabidos sô os tres angulos
se busca hum lado, o deixamos
para quando tratarmos dos
triangulos obliquangulos

Uzo dos precedentes Axiomas

Primeiramente os triangulos esferi-
cos huns saõ rectangulos outros obliquang.os

Dos rectang.os huns tem tres an-
gulos rectos, outros dous, outros hum sô

Se

Se o triang.º esf.º tiver todos os ang.os rectos naõ nececita de soluçaõ porq. pella propried.e 13 seraõ os tres lados quadrantes, e as avessas se os tres lados forem quadrantes seraõ os tres ang.os rectos.

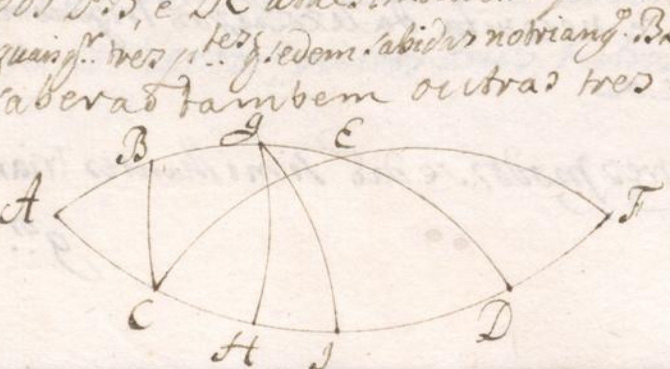
Se o triang.º esf.º tiver dous ang.os rectos seraõ quadrantes os dous lados opostos, e dado o terc.º lado saberse ha o ang.º oposto a elle, por ser por elle medido, ou as avessas sabido o ang.º saberseha o lado oposto por ser a sua medida portanto nestes dous cazos se naõ nececita da trigonometria.

Porem se o triangulo esf.º tiver som.te hum ang.º recto, e os dous obliquos, entaõ se nececita da rezoluçaõ trigonometrica.

De tres modos se daõ similhantes triangulos

q.ᵒ em q. há hum só ang.ᵒ recto porq.
os outros dous ang.ᵒˢ saõ ambos agu-
dos, ou ambos obtuzos, ou hum agu-
do, e hum obtuzo.

Q.ᵈᵒ se der hum triang.ᵒ rectang.ᵒ em
q. os outros dous ang.ᵒˢ sejaõ obtuzos,
ou hum obtuzo, e hum agudo, ou ca-
da hum dos lados mayor q. quadrante
se rezolve em lugar delle o outro tri-
ang.ᵒ q. lhe fica oposto continuã-
dos os lados athe semicirc.ᵒˢ porq.
rezolvo este se fica conhecendo aque-
lle pella propried.ᵉ 2.ᵃ Como por ex-
emplo. Se se der o triang.ᵒ BDC
em q. ha o ang.ᵒ recto D, e os dous obtuzos B,
e C em lugar delle se solve o triang.ᵒ
ABC q. lhe fica oposto continuados os la-
dos DB, e DC athe semicirc.ᵒˢ ao ponto A, porq.
conheci-
(?) tres p.ᵗᵉˢ q. se dem sabidas no triang.ᵒ BDC se
saberaõ tambem outras tres no



triang.ᵒ

triang.º ABC, porque os ang.ᵒˢ A, e D
saõ iguaes pella propried.ᵉ 4 os La-
dos AB, e AC saõ os Complem.ᵗᵒˢ pª
Simicirc.º dos Lados DB, DC, e os
angulos ABC complem.ᵗᵒ pª simicir-
c.º do Ang.º DBC, ACB, do ang.º DCB,
e assim o mesmo seno q. he do arco
AB he de BD, o seno do arco AC,
he o de CD, o seno ABC, he o de DBC
o de ACB he o de DCB, o Lado BC he
o mesmo em hum triang.º q. em outro
Similhantem.ᵗᵉ se se proguzer pª soltar
o triang.º CED em q saõ o ang.º D rec-
to, E obtuzo, e C agudo, em lugar
delle se soltava o triang.º EDF
oposto ao triang.º CED, continua-
dos desde o ang.º agudo C os Lados
athe simicirculos.

Porem

porem q.do se propoem triang.o
esferico rectang.o com os outros dous
ang.os agudos, ou com os lados cada
hum menor q. quadrante q. he o mes-
mo, entaõ dadas quaisquer tres p.tes
delles, se acharaõ facilm.te quaesq.r
das outras com o beneficio da accô-
modaçaõ de algum dos pr.os dous axiomas

2.do q.do no triang.o proposto se naõ achar
à pr.a vista a proporçaõ conveniente en-
tre as p.tes dadas, e buscadas, p.a por me-
yo della se soltar, entaõ se continuem
cada hum dos lados athe quadrantes,
e pellos seus extremos se deite outro
quadrante, porq. feito isto; nos complem.tos
dos lados, e ang.os dados se achara
a accomodaçaõ de algum dos
dous axiomas p.a por meyo della

Achar-

acharmos a proporcaõ ou analogia entre as p.res dadas, e as q̃ buscamos; porem q.do algũas vezes naõ basta a pr.a continuacaõ dos Lados p.a se achar a proporcaõ, se aplica seg.da continuacaõ, e nella se acha infalivelm.te como veremos nos problemas seguintes.

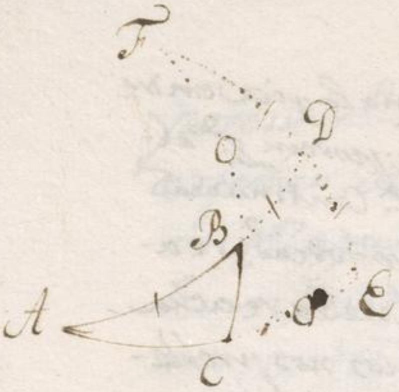
Problema 1

dos triang.os rectang.os

Dada a hypotenuza, e hum ang.o obliquo buscarse o Lado oposto ao ang.o dado.

No triang.o ABC dada a hypotenuza AB, e o ang.o agudo A p.a buscarmos o Lado BC continuaremos todos os Lados athe quadrantes, a saber AB athe D, AC athe E, CB athe F, e lançado pellas extremidades o quadrante FDE ficaremos

Conhe-



Conhecendo outro triang.º
F B D a saber o arco F D com-
plem.to de D E, medida
do ang.º A, o arco B D
Complem.to da hypotenuza
A B, o ang.º recto D, e por
tanto se nelle buscar-
mos a hypotenuza F B Conheceremos
Logo o Lado B C do triang.º proposto,
Cujo Complem.to he o d.º arco F B, po-
rem como na pr.ª Continuação temos
dous triang.os Com o mesmo ang.º agu-
do junto a baze a saber o triang.º A B C
e o triang.º A D E, em q. he comum o an-
g.º A diremos

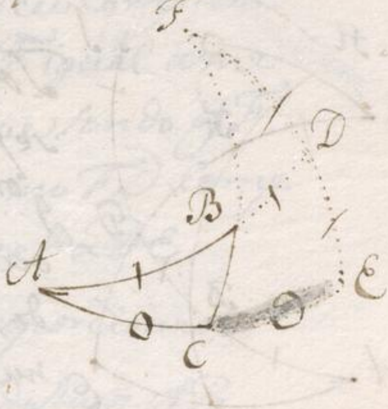
Como o seno da hyp. ou quadr.te A D
p.ª o seno da perp. D E
assim o seno da hyp. A B
p.ª o seno da perp. buscada B C

ou alternado os termos

seno da hyp. A D	ou pelo	seno do ang.º recto C
seno da hyp. A B	axioma 3º	seno do lado oposto A B
seno da perp. D E		seno do ang.º A
seno da perp. B C		seno do Lado oposto B C

Problema 2.º

Dada a hypotenuza, e hum ang.º obliquo buscase o lado adjacente ao ang.º agudo.



Dada a hypotenuza AB
darse o seu Complem.to
BD, dado o Ang.º A dar-
se a sua medida DE,
e o seu Complem.do DF
p.a sabermos o arco AC
ou o buscamos, a elle, ou ao seu Complem.to
CE q. será medida do angulo F.
em lugar do triang.º ABC solta-se o trian-
g.º FBD, dizendo

Seno da base FD Complem.to do ang.º A
Tang. da perp.ar BD Comp. da hyp. AB
Radio, isto he, seno da base ou quadr.te FE
Tang.te da perp. CE Comp. do Lado AC
ou alternando observemos

Seno do Comp. do Ang.º A
seno do quadr.te FE
Tang. do Compl. de AB
Tang. do Comp. de AC

Problema 3.º

Dada a hypotenuza e hum ang.º obliquo buscar o outro ang.º obliquo

Todas as vezes q no triang.º ABC se fizer mençaõ de dous ang.os obliquos, ou ambos dados ou hum dado e hum buscado, seraõ necess.as duas Continuaçoens porq.to na pr.a temos o arco BD Comp. da hypotenuza, o arco DE medida do ang.º A, e o seu Comp. FD, porem p.a a medida do ang.º B, porq.to no triang.º FBD he o ang.º B igual ao ang.º B no triang.º ABC, por serem ang.os opostos no vertice, sera necess.º no mesmo triangulo FBD em q temos o Comp. de AB, e o Comp. do A tornarmos a continuar os Lados BF athe H, e BD athe I p.a q. Lançado o quadran-

te

te GHI tenhamos no arco HI a medi-
da do ang.º B, e GH o seu Complem.to
será entaõ o arco GF igual a me-
dida do ang.º A, porque sendo GF
Comp. de FD, e o mesmo FD Comp.
de DE, será GF igual a DE.

portanto saõ proporcionaes

Seno da baze BD Comp. da hyp. AB
Tang. da perp. FD Comp. do ang.º A
Radio ou seno da baze BI
Tang. da perp. IH medida do ang.º B

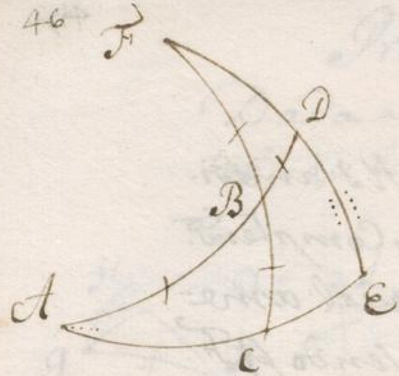
ou

Seno da baze BD
Seno da baze BI
Tang. da perp. DF
Tang. da perp. IH

Problema 4

Dada a hypotenuza e hum Lado bus-
care o ang.º oposto a tal Lado.

No



No triang.º ABC são proporcinaes.

seno da hyp. AB
seno da perp. BC Lado dado
Radio ou S. da hyp. AD
S. da perp. DE medida do ang.º busc.º

ou pello axioma 3.º
S. do arco AB
S. do ang.º oposto C
S. do arco BC
S. do ang.º oposto A

Problema 5

Dada a hyp., e hum Lado buscar o ang.º adjac.te ao lado dado.

No triang.º ABC porq.to se busca o ang.º B se devem Continuar athe quadr.tes os dous Lados q̃ formaõ o tal ang.º a saber BA, e BC porq. se se continuassem os outros dous AB, e AC seria inutil a tal continuaçaõ, e se requeria seg.da Continuaçaõ, porem Con-

ti

tinuandose os ditos BA, athe D, e BC athe E no arco DE temos a medida do ang.º B, e saõ proporcionaes

Tang. da perp. CE comp. do Lado dado
Radio ou Seno da baze FE
Tang. da perp. DA Comp. da hyp. AB
Seno da baze FD Comp. de DE medida do ang.º busc.º

Problema 6.º

Dada a hypotenuza, e hum Lado buscase o outro Lado.

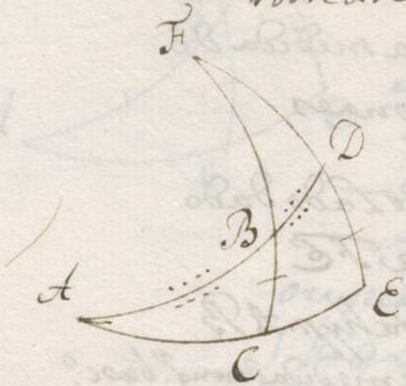
No triang.º ABC continuados os Lados, saõ proporcionaes.

S. de FB Comp. do Lado dado
S. da perp. BD Comp. da hyp.
Radio ou S. de FC
S. da perp. CE Comp. do Lado AC buscado.

Pro-

Problema 7.º

Dado hum Lado, e o ang.º oposto buscar se a hypotenuza.



S. de DE medida do ang.º A
Radio ou S. de AD
S. do Lado dado BC
S. da hyp. AB.
ou pello axioma 3.º

S. do ang.º dado A
S. do Lado oposto BC
S. do Ang.º C dado
S. do Lado AB oposto

Problema 8

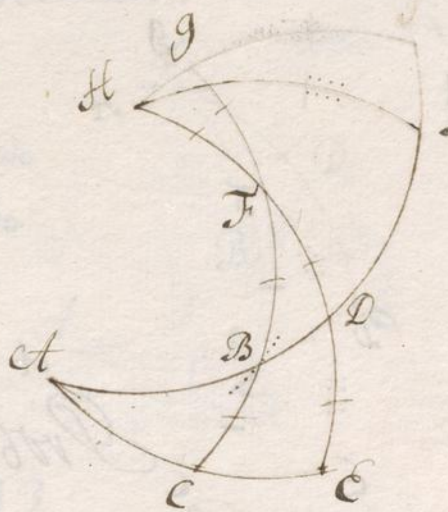
Dado hum Lado e o ang.º oposto buscar se o outro Lado.

Tang. de DE medida do ang.º A
Radio ou S. da baze AC
Tang. da perp. BC
S. da baze AC buscada

Problema 9.º

Dado hum Lado, e o ang.º oposto, bus-
caçe o obliquo adjac.te ao Lado dado,

Nes-



Neste Cazo saõ necess.as duas Continuaçoes por se fazer mençaõ de ambos os ang.os obliquos, porq em huã só senaõ podem dar a medida de ambos os ang.os, e por tanto. Saõ proporcionaes

S. de FB Comp. do Lado BC dado
S. de FD Comp. do ang.o dado A
Radio, ou S. de BG
S. de GI medida do ang.o busc.o B.

Problema 10

Dado hum Lado, e o ang.o obliquo adjac.te buscar o ang.o oposto.

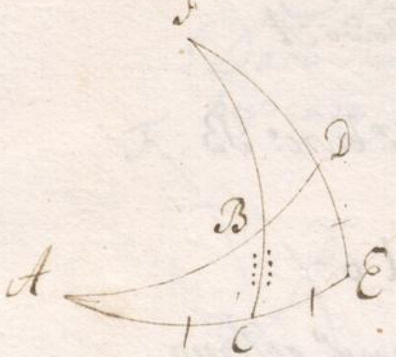
Este problema he Converso do antecedente, e por tanto na mesma fi-

fig.ª vemos que sao pro-
porcionaes.

R. ou S. de BG.
S. da perp. GI medida do ang. dado
S. de BF Comp. do Lado dado
S. da perp. FD Comp. do ang.º busc.

Problema 11

Dado hum Lado, e o ang.º obliquo
adjac.te buscar o outro Lado.



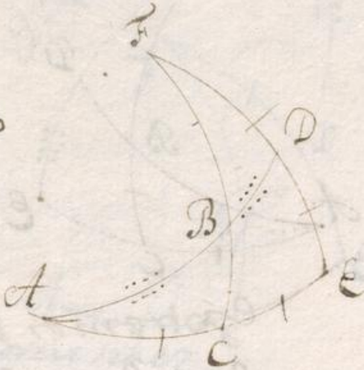
R. ou S. da baze AE
Tang. da perp. DE medida do ang.º d.
S. da baze AC
Tang. da perp. BC buscada

Problema 12

Dado hum Lado, e o ang.º obliquo
adjacente buscar a hypotenuza

ter-

termos proporcionaes

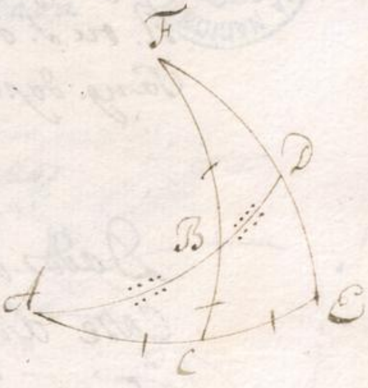


R., ou S. da baze FE
Tang. de CE Comp. do Lado dado
S. de FD Comp. do ang.º dado
Tang. BD Comp. da hyp.
buscada

Problema 13

Dados os dous Lados buscar a hypotenuza.

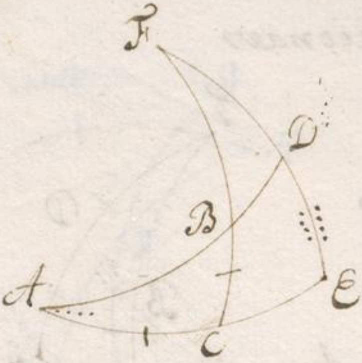
termos proporcionaes



R. ou S. de FE
S. da perp. CE Comp. do Lado dado
S. de FB Comp. do outro Lado
S. de BD Comp. da hyp. AB
buscada

Problema 14

Dados os dous Lados buscar hum dos Ang.os obliquos



A continuação dos Lados se deve sempre principiar desdo ang.º de que se fas mensaõ, ou seja sabido, ou buscado p.q. entre os extremos dos quadr.es fique a medido tal ang.º.

termos proporcionaes

S. da baze AC ou lado junto ao ang. busc.º
Tang. da perp. BC ou outro Lado
R. ou S. da baze AE
Tang. da perp. DE medida do ang.º busc.º

Problema 15

Dados os dous ~~Lad~~ Ang.os obliquos buscase a hypotenuza.

Feitas as duas Continuaçoẽs vemos q. o arco DE mede o ang.º A, e o arco HI ao ang.º B, FD he complemento do angulo A,

GH Comp. do ang.º
B. BD Comp. da
hyp. buscada,
DI igual a dita
hyp.

São por tanto porporcionaes
Tang. de HI medida de hum ang.º
R. ou S. de BI
Tang. de FD Comp. do outro ang.º
S. de BD Comp. da hyp. buscada

Problema 16

Dados os dous ang.os obliquos buscarse hum dos Lados.

termos porporcionaes
S. de HI medida do ang.º
junto ao Lado busc.º
R. ou S. de BH
S. de FD. Comp. do ang.º
oposto ao lado busc.º
S. de FB Comp. do Lado busc.º

Da

Da Soluçaõ dos triang.os
esfericos obliquang.os.

Os triang.os esfericos obliquang.os tem tres meyos diferentes de se soltarem conforme as partes dadas, e buscadas.

O prim.ro modo he pella accomodaçaõ do tercr.o axioma q.do no triang.o saõ dados hum ang.o com o Lado oposto, e mais, ou Lado oposto ao ang.o buscado, ou ang.o oposto ao Lado buscado, e nestes dous cazos se escuza reduzir o triang.o a dous rectang.os.

O seg.do modo he pella reducçaõ do triang.o a dous rectangulos por via de huã perp. q. se deve Lançar de tal ang.o q. fiquem em hum dos dous rectang.os conhecidas tres p.tes p.a por meyo dellas se buscar a perp. e mais os seguem.tes da baze, ordinariam.te se ne-

ce-

cessita nestes Casos de soltar tres proporçoẽs p.ª servir em Conhecim.to da p.te buscada no triang.o obliquang.o

A tal perp. humas vezes Cahe dentro do triang.o e outras fora delle. Cahe dentro do triang.o quando os ang.os junto ao Lado sobre q. se deita q. se fica Chamando baze saõ da mesma qualid.e isto he ou ambos agudos, ou ambos obtusos, e Cahe fora delle q.do saõ de diversa qualid.e. de qualq.r modo q. seja sempre se deve tirar de tal ang.o q. no triang.o q. forma fique o ang.o recto oposto a hum Lado dado, e a perp. oposta ao ang.o sabido p.ª se investigar pello 3.º axioma. isto he dizendo

Como o seno do Ang.o recto p.ª o seno do Lado q. fica sendo hyp.
assim o seno do ang.o oposto â perp.
p.ª o seno da perp.

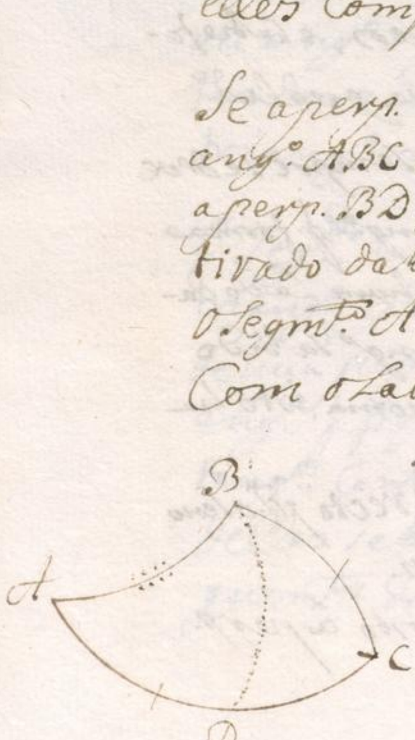
O terc.º modo he pella accomodaçaõ do quarto axioma seg.te adiante se tratará, e serve p.ª aquelles trian-g.os em q̃ sabidos só tres Lados se bus-ca hum ang.o, ou as avessas sabidos os tres ang.os se busca hum Lado.

Soluçaõ dos triang.os por meyo da perp.

Problema 1

Dados dous Lados com hum ang.o por elles comprehendido buscar o outro Lado.

Se a perp. Calir dentro como no tri-ang.o ABC busquece pr.º no triang.º BDC a perp. BD, despois o segm.to DC, o q.l tirado da baze AC ficara conhecido o segm.to AD, entaõ no triang.º ADB com o Lado AD, e o Lado BD conhecidos se busque a hypo-tenusa AB



Porem

Porem se a perp. Cahir fora do triang.º
Como no triang.º E F G Continuada a
baze E F athe H fica Conhecido o ang.º
exterior G F H por ser o q. ao ang.º
interior E F G falta p.ª 180 gr. des-
te modo se busca no triang.º rectang.
G F H a perp. G H, depois a baze F H
a qual junta ao Segm.to
ou Lado E F, fica todo o
Lado E H, entaõ com
este Lado E H, e com
a perp. G H se busca

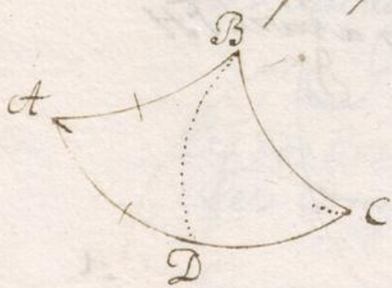
no triang.º rectang.º E G H a hyp.t
E G q̃ he o mesmo Lado do triang.º E F G
o qual se soubermos q̃ deve ser ma-
yor de 90 gr. sera necess.º o arco q̃ nos
sahir menor de 90 gr. tiralo de 180
p.ª q̃ fique o Lado verdadeiro

Prob.

Problema 2.º

Dados dous Lados com hum ang.º por elles comprehendido buscar o outro ang.º

Se a perp. cahir dentro como no triang.º ABC, se buscarâ no triang.º ABE, a dita perp. BD e mais o segm.to AD, o q.l tirado de todo o lado AC fica o segm.to DC no outro triang.º tambem rectang.º entaõ

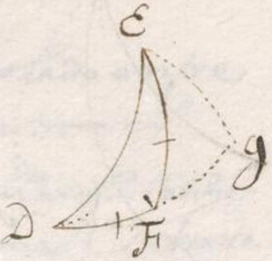


com este Lado, e com a perp. BD se busca o ang.º C.

Porem se a perp. cahir fora como no triang.º DEF, sabido o ang.º EFD fica tambem conhecido o ang.º EFG. entaõ com elle e com a hyp. EF se busca no rectang.º EGF a perp. EG e depois o segm.to GF, o q.al junto ao lado DF do outro triang.º fica dado o todo

o La-

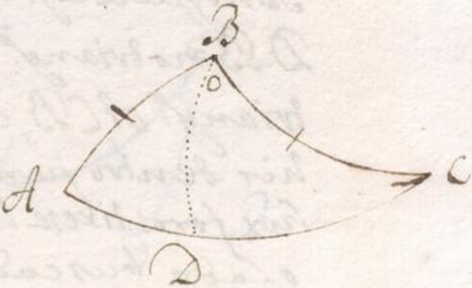
o Lado DG, e com elle
mais com a perp. EG
se busca o ang.º per
tendido EDF.



Problema 3

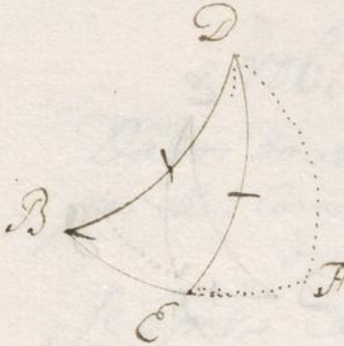
Dados dous Lados com hum ang.º
oposto a hum dos Lados buscar o ang.º
por elles comprehendido

A perp. se deve tirar desdo ang.º bus-
cado, e se cahir dentro no triang.º co-
mo em ABC buscare
a perp. BD, e despois
se busca o ang.º DBC
comprehendido entre
a perp., e o Lado BC



entaõ no outro triang.º ADB com
a mesma perp. BD, e com o Lado
AB se busca o outro angulo ABD
o q̃. junto ao ang.º DBC fica to-
do o ang.º ABC q̃. se pertendia.

se

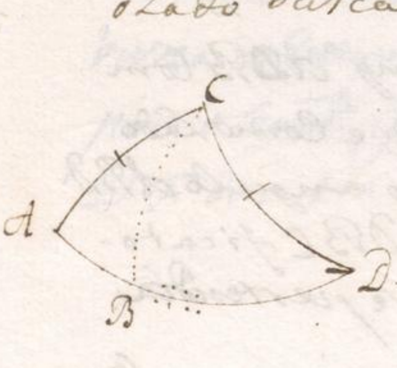


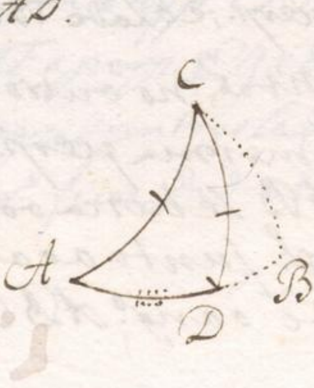
se a perp. DF cahir fora do triang.º buscarse-ha primr.º no rectang.º BDF a perp. DF, e mais o ang.º BDF, despois no rectang.º EFD o ang.º EDF o q.l tirado de todo o ang.º BDF ficara o ang.º BDE pertendido.

Problema 4.º

Dados dous lados com o ang.º oposto a hum delles buscar o outro lado.

Busquece a perp. CB, e mais o segm.to DB no triang.º CBD, e o segm.to AB no triang.º ACB, em tão se a perpend.r cahir dentro juntemse os segm.tos, se cahir fora tirese hum do outro ficara o lado buscado AD.

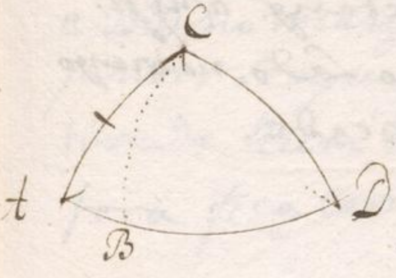


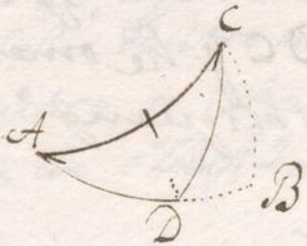


Problema 5

Dados dous ang.os com o Lado entre elles incluido buscar o outro ang.o.

Deitada a perp. desde hum dos ang.os conhecidos, e achada pello axioma 3.o se busca o ang.o BCA o qual tirado do ang.o DCA q.do a perp. cahe dentro ou junto, q.do cahe fora fica o ang.o DCB, com elle e com a perp. se busca o ang.o CDB, o q.l he o mesmo buscado q.do a perp. cahe dentro, ou o seu Comp. p.a 180 gr. q.do cahe fora.

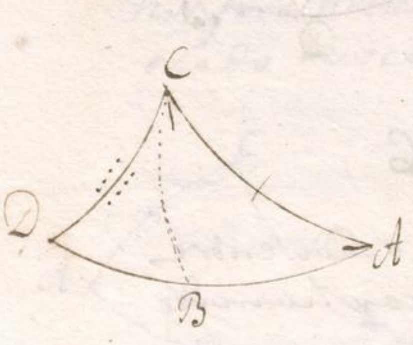


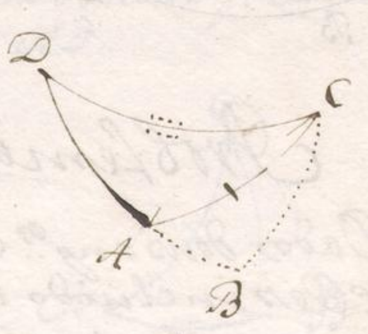


Problema 6

Dados dous ang.os com o Lado entre elles incluido buscar hum dos outros Lados.

A perpendicular se deita desde a-
quelle ang.º conhecido q̃ fica jun-
to ao Lado buscado então achada
a perp. e mais o ang.º ACB in-
cluido entre ella, e o Lado sabido,
se tira o tal ang.º do ang. DCA
se cahe a perp. dentro, ou se lhe
junta se cahe fora do triang.
e fica sabido o ang.º DCB, com
elle, e mais com a perp. se bus-
ca no triang.º rectang. a hyp.
DC q̃. he o mesmo Lado no triango
obliquiang.º buscado.

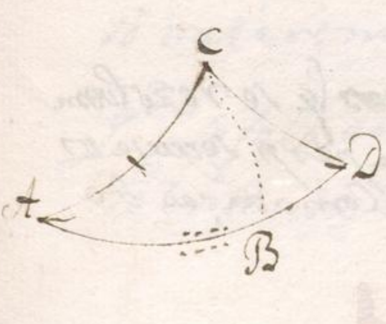


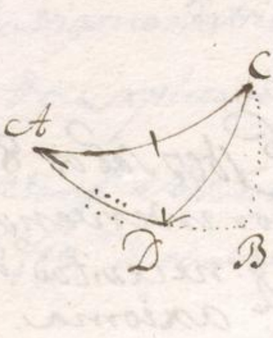


Problema 7

Dados dous ang.os com hum dos la dos opostos buscar o Lado entre os ang.os incluidos.

Deitada a perp. desde o ang.º ignorado isto he do ang.º oposto a o Lado buscado se investiga a perp., e depois os segm.tos da baze a saber AB no triang.º ACB, e BD no triang.º BCD, os quais juntos se a perp. cahe dentro, ou tirado hum do outro se cahe fora fica conhecido o Lado AD.





Problema 8

Dados dous ang.os com hum dos Lados opostos buscar o outro ang.o.

Deitese a perp. desde o ang.o buscado, e achada ella se busque o ang.o BCA. e despois no outro triang.o o ang.o DCB os quais juntos q.do a perp. cahé dentro, ou diminuin-do hum do outro q.do cahe fora ficara achado o ang.o pertendido

Estes sao os 8 casos q. se rezolvem por intervensao da perp. seguese os 2 q. necesitao da alomodação do 4.o axioma

Axioma 4

Em qualq.r triang.o esf.o em q̃ se souberem os tres Lados.

São proporcionaes

1.o termo O rectang.o dos senos de dous Lados q̃ comprehendem hum ang.o buscado.

2.o termo O quadrado do Radio.

3.o termo O rectang.o do seno da semisoma dos tres Lados, e do seno da diferença entre a semisoma e o Lado oposto ao ang.o buscado.

4.o termo O quadrado do seno do comp. da metade do ang.o buscado.

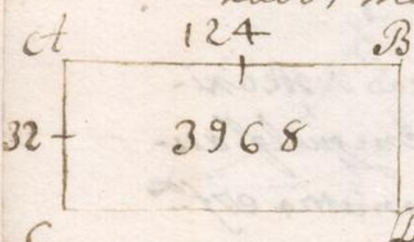
Deixada a demonstração deste axioma, que se pode ver em qualq.r autor dos q̃ tratão da trigonometria esf.a só trataremos da explicação dos tr.os

Q.do se fala em rectang.o absolutam.te se entende huã fig.a de quatro L.os

Cada

cada duas opostas iguaes, e paralellas, q. concorrendo huas com outras formaõ quatro ang.os rectos; difere do quadrado, em q. este tem sempre os quatro Lados iguaes, mas o rectang.o basta q. tenha cada dous opostos iguaes, e pode ser mais comprido q. Largo.

Q.do neste cazo se fala em rectang.o se entende a area delle aq.l p.a se saber he necess.o multiplicar hum dos Lados mayores por hum dos menores,



e o producto será a d.a area ou somar o Logaritmo de hum dos Lados mayores com o Log. de hum dos menores, e a soma será o log. da area. como se se der o rectang.o ABCD em q. hum dos Lados mayores seja de 124 palmos, e hum dos menores 32 se quizermos

sa-

saber q.tos palmos Contem a sua area,
multiplicaremos os 124 por 32, e
virão no producto 3968 pella area
ou tambem se somarmos

o Log. de 124 ———	209342
Com o Log. de 32 ———	150514
sera a soma ———	359856

q. he Log. dos mesmos 3968

Assim q.do se fala em Rectang.o de se-
nos se entende o producto da multi-
plicação de hum seno por outro.

Q.do se fala em quadrado do Radio se en-
tende o producto da multiplicação de-
lle por si mesmo, portanto, quer dizer
o axioma 4 q.

Como ha o producto da multiplicação
dos dous senos de dous arcos q. formão
o ang.o buscado,

p.a o producto da multiplicação do
Radio por si mesmo,

Assim

Assim se ha o producto do seno da simissoma dos tres Lados pello seno da differença entre esta simissoma e o Lado posto ao ang.º buscado,

P.ª o ~~producto~~ da multiplicaçaõ do seno do Compl. da metade do ang.º busc.º per si mesmo.

O q.l producto como for achado he necess.º tirarlhe a rais quadra, q. será o seno do Compl. q. se busca.

Comq. vemos 4 termos desta proporçaõ, a Compor cada hum da multiplicaçaõ de dous senos hum por outro, e dispostos assim se multiplicarmos o seg.do pello terc.º isto o quadrado do Radio pello rectang.º do seno da meya soma dos tres Lados, e do seno da differença entre esta meya soma, e o Lado oposto ao ang.º buscado, q. nestes casos se chama baze, e este produto o repartir-

mos

mos pello rectang.º do senos dos dous arcos q̃ incluem o ang.º buscado, nos sahira no Quociente hum num.º do q.e al tirada a rais quadra, esta sera seno do Comp. de hum arco q̃ dobrado dava a medida do ang.º q̃ se busca.

A the aqui a ~~opperaçaõ~~ operaçaõ pellos num.os naturaes, provem como em qualq.r solucaõ de triang.º he mais laboriozo o calculo pellos num.os naturaes que pelos Logaritmos, neste o he m.to mais pello embaraço de tantas multiplicoes, e divizoẽs, pello que se uza nelle dos Logaritmos, e assim fica sendo o pr.º termo a soma dos Logaritmos dos senos dos dous arcos q̃ incluem o ang.º buscado.

O seg.º termo sera o dobro do Logar. do Radio, por q.to q.do se quadrar q.l q.r num.º se dobra o seu logar., e

fica

fica o Logar. do quadrado
O terc.º termo será a soma dos Logar.
do seno da simisoma dos tres Lados,
e o do seno da diferença entre esta
simisoma, e a baze.

O quarto termo q. assim se achar
será o Logar. do quadrado do seno do
Comp. da metade do ang.º buscado,
e porq. p.ª se buscar a rais quadra
de hum num.º pellos Logar. se toma
a metade do Logar. do tal num.º, a
qual he Logar. da sua rais, se do Logar.
que nos vier no quarto termo tomar-
mos a metade, esta será o Logar. do se-
no do Comp. da metade do ang.º busc.º

Tambem na soluçaõ destes triang.os
se costuma uzar da seg.te abreviatura

Em q.l q.r proporçaõ p.ª se achar o quar-
to termo he a regra: somar o Logar. do
seg.do com o Logar. do terceiro,

e

e da da Somma tirar o Logar. do pr.º
fica o Logar. do quarto.

Porem se em lugar desta regra que
rendo escuzar a deminuiçaõ, se somar
o Compl. aristmetico do pr.º Logar.
do pr.º termo com os Logar. do segd.º
e terceiro, e da Soma cortarmos a pr.ª
Letra da maõ esquerda ficará o Logar.
do quarto termo.

Complem.to aristmetico de hum Logar.
he o num.º q. lhe falta p.ª inteirar o Radio.

Exemplo. se 3. daõ 21 q.' daraõ 40

Somado o Log. de 21	132222
Com o Log. de 40	160206
e da Soma	292428
tirado o Log. de 3	047712
fica o Log. de 280	244716

Porem

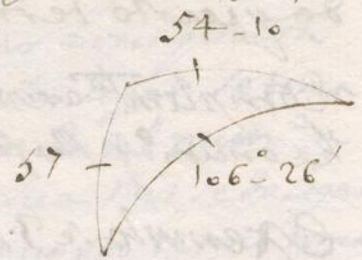
Somado o Comp. aristme- tico do Log. de 3	952288
Com o Log. de 21	132222
e mais Com o Log. de 40	160206
tirada a pr.ª Letra da maõ	1244716
esquerda fica o mesmo Log. de 280	

O mesmo he g.do na proporção entrão
Logar. de senos.
Tudo o referido se perceberá milhor
Com hum exemplo

Propozição 1.ª

Seja dado o triang.º DEF em q. se
sabem os tres lados a saber os dous
q. formão o ang.º buscado hum de
$54^o - 10'$, outro de $106^o - 26'$, e o lado opos-
to ao ang.º busc.º q. se chama baze de
57^o, e se busca o ang.º E

Dispozição da
Regra



Seno de 54 - 10 — Comp. arist. — 009113
Seno de 106 - 26 — Comp. arist — 001811
baze 57 - 00
217 - 36
Simisoma 108 - 48 — Log. do s. — 997619
57 - 00
baze 051 - 48 — Log. do s. 989577
1998077
Soma
Simisoma 999038
Seno do Comp. de $12^o - 1$
Cujo dobro — 24 - 2 será o ang.º E buscado

gdo nas operaçoens em q. se usa do compl. arithmetico do pr.o termo entra em segdo ou tercr.o lugar o radio se deyxa então de somar com os outros porq. como a pr.a letra da mão esquerda q. da soma se corta he o mesmo radio ou seu dobro como nos cazos similhantes ao deste exemplo se deixa de somar o radio para escuzar depois tiralo

Proposição 2.a

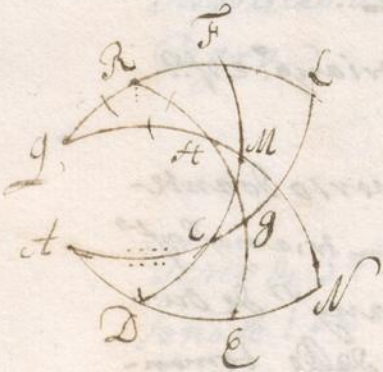
Dados os angs. de hum triangº esfº buscar hum dos lados.

Este problema he converso do antecedte porq. os lados de hum triangº esfº se podem mudar em angs. de outro, e os angs. em lados delle, tomando pello mayor angº o seu complemto pª semicircº

Como

Como no triang.º ADC q. os polos dos seus arcos saõ os pontos RLH e nelles se forma o triang.º cujos ang.os saõ iguaes aos Lados de ADC, e cujos Lados saõ iguaes aos ang.os do mesmo ADC. porq.to a medida do ang.º A he o arco GE cujo Comp. he o arco HG mas porq. o arco RH he Comp. de HG fica RH sendo igual a GE e ao ang.º A

a medida do ang.º C he o arco FL, e porq. RL he igual a FL fica RL sendo igual ao ang.º C, o ang.º D he seu Comp. p.ª simicirc.º o ang.º CDE, mas porq. a medida desre he o arco MN, e o Comp. de MN he o arco HM, do qual he



tambem Comp. o arco LH, fica LH sendo igual a MN e ao Complemento p.ª simicirculo do ang.º ADC

Do mesmo modo o arco DC no triang.º ADC he igual ao arco FM medida do ang.º Q no triang.º QHR, o arco AD he igual ao arco EN medida do ang.º H, e o arco AC he igual ao arco GL medida do ang.º QRH o q.l he o comp. p.ᵃ simicirc.º do ang.º QRH.

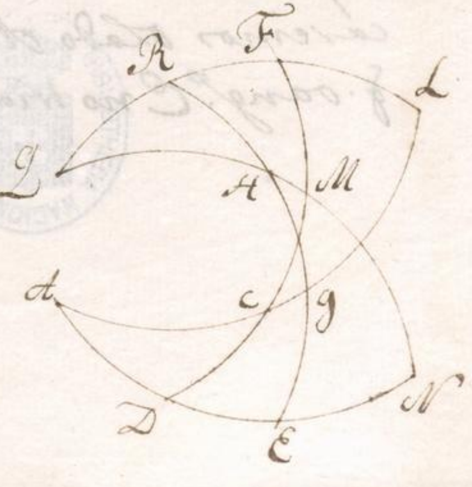
Correspondem portanto e são iguaes

No triang.º ADC . . . . No triang.º HQR

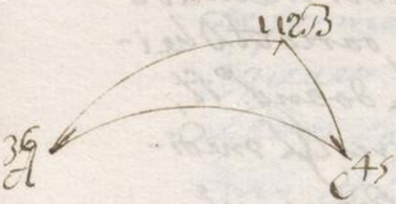
os arcos { AD . . . . ao ang.º H
DC . . . . ao ang.º Q
AC . . . . do compl. p.ᵃ simicirc.º do ang.º R }

e as avessa

{ o ang.º A . . . . ao arco RH
o ang.º C . . . . ao arco QR
o comp. de D . . . . . . ao arco QH }

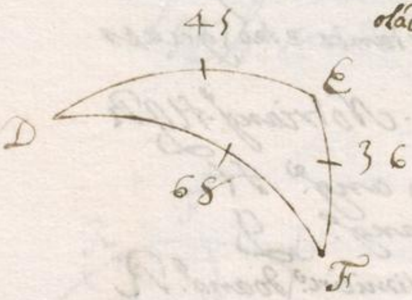


Sejaõ agora dados os ang.os do triang.o-
ABC a saber o ang.o A de 36 gr. o ang.o



C de 45 gr., e o ang.o B de
112 gr. e busquece o la-
do AC

Formemos o triang.o DEF
no q.l supponhamos o lado DE de 4
o lado EF de 36 gr. e o lado DF
de 68 gr. Comp. p.l simicirc.o
do ang.o B no pr.o triang.o
seraõ portanto os ang.os
deste iguaes aos lados da
quelle a saber o lado AB



ao ang.o F, o lado BC ao ang.o D, o lado
AC ao Comp. p.l simicirc.o do ang.o
E, portanto do mesmo modo bus-
caremos o lado AC no triang.o ABC,
q. o ang.o E no triang.o DEF.

E assim

e assim disporemos os artigos

Seno de 45° ...... Comp. arit. ... 015052
Seno de 36 ..... Comp. arit ... 023078
baze - 68
soma - 149
semisoma 74-30 ... log. do s. 998391
baze . 68
difer. 6-30 ... Log. do s. 905386
soma 1941907
Seno do Comp. de 59°-11' semisoma 970953
Cujo dobro -118-22 sera o ang.°
E no triang.° DEF, mas porq. este he o mayor ang.° sera o seu Comp. pl.° simi-circ.° a saber 61°-38' a grandeza do arco AC no triang.° ABC.