

~~135~~ 23.

136

1069
S. A.
ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA

POR M. CLAIRAUT

DA ACADEMIA REAL
DAS SCIENCIAS DE PARÍS,
E DA SOCIEDADE REAL
DE LONDRES

TRADUZIDOS NA LINGUA PORTUGUEZA
POR
JOAQUIM CARNEIRO DA SILVA.



LISBOA
NA REGIA OFFICINA TYPOGRAFICA

ANNO MDCCLXXII.

Com licença da Real Meza Censoria.



B. B. B. B.
22-11-1923



AO ILLUSTRISSIMO,
E
EXCELLENTISSIMO SENHOR
SEBASTIÃO JOSÉ
DE CARVALHO E MELLO,
MARQUEZ DE POMBAL,
PRIMEIRO MINISTRO,
E SECRETARIO DE ESTADO
DE S. MAGESTADE FIDELISSIMA,
&c. &c. &c.



*OFFERECO a V. EXCEL-
LENCIA a versão dos
Elementos de Geometria do célebre
A ii Clai-*

Clairaut, animado do desejo de dar alguma demonstração pública da veneração respeitosa, que a *V. EXCELLENCIA* conserva, e de procurar-lhe por meio deste reverente obsequio a respeitavel protecção de *V. EXCELLENCIA*, para que este meu trabalho mereça em Portugal a mesma estimação, que teve na França pelo novo, e excellente methodo, com que o *Author* tratou esta materia.

São as *Artes*, e *Sciencias* devidoras a *V. EXCELLENCIA* da gloria, que do seu conhecido augmento lhes resulta, procurando *V. EXCELLENCIA* com incessante cuidado todos os meios, que podem contribuir para os seus progressos, e consequentemente para o bem geral. Sendo justissimo por este

te

te motivo , que a V. EXCELLENCIA se dedique hum Tratado , que facilita os principios daquellas mesmas Artes , e Sciencias , de que V. EXCELLENCIA he Illustre Protecção ; e dignando-se V. EXCELLENCIA accitallo com aquella complacencia , que lhe he natural , se completará o objecto da minha ambição , tendo a prerogativa de concorrer para levar até á posteridade mais remota o rendimento , que as Artes , e Sciencias devem ao seu Mecenas , a bondade , com que V. EXCELLENCIA me honra , e a sinceridade do meu reconhecimento.

EXCELLENTISSIMO SENHOR

Beija a mão de V. EXCELLENCIA

Seu mais reverente criado

Joaquim Carneiro da Silva.



DO EDITOR.

O Precifarem alguns fogeitos de aprender a Geometria por hum methodo , que não lhes roubando grande parte do tempo , que para outro estudo necessitam , lhes désse algum conhecimento della , foi o principal motivo de se fazer a traducção dos Elementos de Geometria de Mr. Clairaut. Feita pois a versão , se resolveo o publicar-se , entendendo-se que se facilitava a algumas pessoas , que quizessem aprender a Geometria , o meio de se instruirem nesta Sciencia ; que todos sabem deve este estudo preceder ao de muitas outras , que della dependem. O novo , e excellente
me-

DO EDITOR

methodo de Mr. Clairaut he digno da attenção dos que se destinão ao estudo da Geometria ; pois entre os Authores , que tratáram desta materia , este he o que com mais brevidade , e mais perceptivelmente nos mostrou quanto ha de essencial na Geometria Elementar. Quanto ao asseio da edição se fez o possivel , para que tambem nesta parte fosse digna da estimação dos Leitores , e da materia , de que ella trata.

PRO-

PROLOGO.

AINDA que a Geometria seja abstracta em si mesma, devemos não obstante conceder que as difficuldades, que encontram aquelles, que a ella se principiam a applicar, provém as mais das vezes do modo, com que esta se ensina nos Elementos ordinarios. Nelles se principia sempre por hum grande numero de definições, de postulados, de axiomas, e de principios preliminares, que parece não promettem senão cousas seccas ao Leitor. As proposições, que depois se seguem, não fixando o espirito sobre objectos mais interessantes, sendo por outra parte difficeis de se conceberem,

P R O L O G O

rem , ordinariamente succede que os Principiantes se fatigam , e desanimam antes de terem alguma idéa distincta do que se lhes quer ensinar.

He verdade que por evitar esta sequidão , naturalmente unida ao estudo da Geometria , cuidáram alguns Authores em mostrar , depois de cada proposição essencial , o uso , que della se podia fazer na prática ; porém com isto provam a utilidade da Geometria , sem facilitarem muito os meios de se aprender ; porque vindo sempre as proposições antes do seu uso , o espirito não encontra idéas sensiveis , senão depois de ter soffrido o trabalho de passar pelas idéas abstractas.

Al-

P R O L O G O

Algumas reflexões , que fiz sobre a origem da Geometria , me deram a esperança de poder evitar estes inconvenientes , com reunir as duas ventagens de interessar , e illuminar os Principiantes. Pensei que assim esta , como todas as mais sciencias , se deviam ter formado por grãos ; que verisimilmente alguma precisão tinha sido a que lhe tinha feito dar os primeiros passos , e que estes se não podiam dar fóra da capacidade dos Principiantes , pois que eram Principiantes aquelles , que os tinham dado.

Prevenido desta idéa , propuz comigo de remontar ao que pôdia ter dado nascimento á Geometria , e cuidei em mostrar os
seus

P R O L O G O

feus principios por hum methodo bastantemente natural , para se poder suppôr ser o mesmo , de que usáram os primeiros Inventores , procurando sempre de evitar todas as falsas tentativas , que elles necessariamente fariam.

A medição dos Terrenos me pareceo ser o mais proprio que havia para dar nascimento ás primeiras proposições da Geometria , o que com effeito he a origem desta Sciencia , pois que Geometria significa *medição de Terreno*. Pretendem alguns Authores , que vendo os Egypcios continuadamente os limites das suas heranças destruidos pelas inundações do Nilo , deitáram os primeiros fundamentos da Geometria , procura-

ran-

P R O L O G O

rando os meios de se segurarem exactamente das situações, da extensão, e da figura dos seus dominios. Porém quando não nos conformássemos com estes Authores, ao menos não se poderá duvidar que desde os primeiros tempos os homens não procurassem methodos para medir, e repartir as suas Terras. Querendo depois aperfeiçoar estes methodos, as investigações particulares os conduziram pouco a pouco a investigações geraes; e tendo comfigo proposto de saber a relação exacta entre toda a sorte de grandezas, formáram huma Sciencia de hum objecto muito mais vasto, do que aquelle, que no principio tinham abraçado, á qual não obstante
con-

PROLOGO

conserváram o nome, que lhe tinham dado na sua origem.

A fim de seguir nesta Obra hum caminho semelhante ao dos Inventores, applico-me primeiramente a fazer descobrir aos Principiantes os principios, de que póde depender a simples medição dos Terrenos, e das distancias accessiveis, e inaccessiveis, &c. dalli passo a outras investigações, que tem tal analogia com as primeiras, que a curiosidade, que he natural a todos os homens, os conduz a deterem-se nellas; e justificando depois esta curiosidade com algumas applicações uteis, venho a fazellos discorrer por quanto ha de interessante na Geometria elemental.

Pa-

P R O L O G O

Parece-me que não haverá dúvida sobre ser este methodo ao menos proprio para excitar aquelles, que poderão estar defanimados com as verdades seccas da Geometria, sem serem applicadas a cousa alguma; antes espero que nelle haverá tambem huma utilidade ainda mais importante, que he o costumar o espirito a procurar, e a descubrir, porque eu evito cuidadosamente de dar alguma proposição debaixo da fórma de theoremas, isto he, daquellas proposições, onde se demonstra que esta, ou aquella verdade o he, sem mostrar como ella se veio a descubrir.

Se os primeiros Authores das Mathematicas apresentáram os seus def-

P R O L O G O

descubrimentos com theoremas ,
foi sem dúvida para darem hum
ar mais maravilhoso ás suas pro-
ducções , ou por evitar o traba-
lho de tornarem a seguir as idéas ,
que nos seus descubrimentos os
tinham conduzido. Seja o que for ,
pareceo-me muito mais a propo-
sito o occupar continuamente os
meus Leitores a resolver Proble-
mas , isto he , a procurar os meios
de fazer alguma operação , ou a
descubrir alguma verdade incogni-
ta , determinando a relação que
ha entre as grandezas dadas , e as
grandezas desconhecidas , que se
querem achar. Seguindo os Prin-
cipiantes este caminho , percebem
a cada passo , que se lhes faz dar ,
a razão , pela qual se conduz o

In-

P R O L O G O

Inventor, e assim podem mais facilmente adquirir o espirito de invenção.

Talvez se me notará em alguns lugares destes Elementos de me sujeitar demaziadamente ao que os olhos me fazem ver, e de não seguir bastantemente a exactão rigorosa das demonstrações. Peço aos que sobre isto me poderiam criticar, queiram observar, que eu não passo levemente senão as proposições, cuja verdade se descobre, por pouco que nellas se faça reflexão. Uso deste modo maiormente nos principios, onde se encontram mais a miudo as proposições deste genero; porque tenho notado, que aquelles, que tinham disposição para a Geometria,

P R O L O G O

tria, faziam gosto de exercitar alguma cousa o seu espirito; e que pelo contrario se defanimavam, quando eram opprimidos com demonstrações, por assim dizer, inuteis.

Tome Euclides o trabalho de demonstrar, que dous circulos, que se cortam, não tem ambos o mesmo centro; que hum triangulo comprehendido em outro, tem a somma dos seus lados menor do que a dos lados do triangulo, em que elle está comprehendido, que disto nos não admiraremos. Este Geometra tinha para convencer a Sofistas obstinados, que punham a sua gloria em negar as mais evidentes verdades: era pois preciso que naquelle tempo tivesse a Geometria-

P R O L O G O

metria , como tem a Logica , o socorro dos raciocinios em fórma para tapar a boca a quem a quizesse contrariar. Porém as cousas mudáram de face. Todo o discurso , que se faz sobre aquillo , que a boa razão por si só anticipadamente decide , se tem hoje por pura perda , e não he proprio senão para obscurecer a verdade , e desgostar os Leitores.

Outra cousa , que se me poderia notar , sería o ter eu omittido differentes proposições , que acham lugar nos Elementos ordinarios ; e de me contentar , quando trato das proporções , de dar sómente os principios fundamentaes dellas.

Ao que respondo , que neste

P R O L O G O

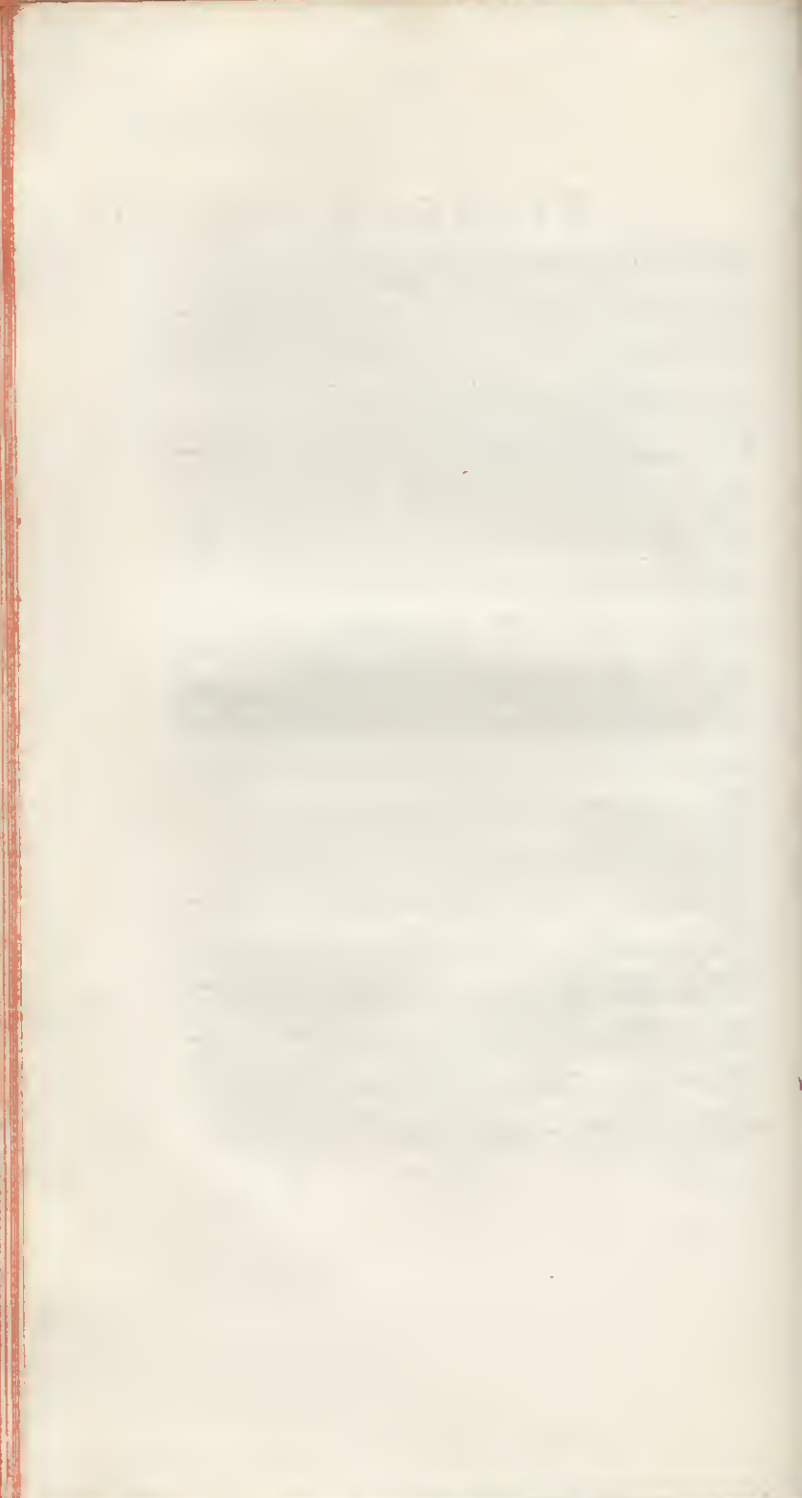
Tratado se acha tudo o que he necessario para completar o meu projecto ; que as proposições , que eu omitto , são aquellas , que não podem ser de alguma utilidade por si mesmas ; e além disto não contribuiriam para facilitar a intelligencia daquellas , de que importa ser instruido ; que a respeito das proporções o que eu dellas digo he sufficiente para dar a entender as proposições elementares , que as suppõem. He esta huma materia , de que tratarei fundamentalmente nos Elementos de Algebra , que depois publicarei.

Em fim , tendo eu escolhido a medição dos Terrenos para interessar os Principiantes , não devo temer que alguns confundam
ef-

P R O L O G O

estes Elementos com os Tratados ordinarios de Medição? Este pensamento só o podem ter aquelles, que não considerarem que a medição dos Terrenos não he o verdadeiro objecto deste Livro; porém que ella me serve sómente de motivo para fazer descobrir as principaes verdades Geometricas. Eu podia da mesma sorte remontar a essas verdades, fazendo a Historia da Fyfica, da Astronomia, ou de qualquer outra parte das Mathematicas, que eu quizesse escolher; porém então a multiplicidade de idéas estranhas, nas quaes seria necessario occupar-se, teria como soffocado as idéas Geometricas, nas quaes eu sómente devia fixar o espirito do Leitor.

ELE-





ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

PARTE PRIMEIRA.

*Dos meios, de que era mais natural
se usasse, para se chegar á me-
dição dos Terrenos.*



tancias.

QUE parece que primeira-
mente se mediria, são os
comprimentos, e as dis-

I.

Para se medir qualquer compri-
mento que seja, o expediente, que
nos subministra huma sorte de Geo-
metria natural, he o de comparar o
com-

comprimento de huma medida conhecida com a medida do comprimento, que se quer saber.

II.

A linha recta he a mais curta que ha de hum ponto a outro, e por consequencia he a medida da distancia entre dous pontos.

A respeito da distancia, vemos que para se medir aquella, que ha entre dous pontos, he necessario tirar huma linha recta de hum a outro ponto, e que sobre esta recta he que se precisa trazer a medida conhecida; porque todas as outras linhas, tendo necessariamente algum desvio maior, ou menor, são mais compridas do que a linha recta, que não tem desvio algum.

III.

EST. I.

Além da necessidade de medir a distancia de hum ponto a outro, succede muitas vezes que somos tambem obrigados a medir a distancia de hum ponto a huma linha. Hum homem, por exemplo, posto na margem de hum rio em D, (Estampa 1.
Fi-

Figura 1.) quer saber a distancia que EST. I.
 ha do lugar , em que elle está , á
 outra margem opposta AB. Bem se
 vê que neste caso , para medir a dis-
 tancia que se quer , he preciso tomar
 a mais curta de todas as linhas rectas
 DA , DB , &c. que se podem tirar do
 ponto D sobre a recta AB. Ora he
 facil de ver , que esta linha a mais
 curta , de que precisamos , he a li-
 nha DC , que supponmos não pender
 nem para a parte de A , nem para
 a de B. Sobre esta linha pois , á
 qual se deo o nome de perpendicular ,
 he que se precisa trazer a me-
 dida conhecida para podermos ter a
 distancia DC , que ha entre o ponto
 D , e a recta AB. Mas tambem ve-
 mos , que para se pôr esta medida
 sobre a linha DC , he preciso que esta
 linha se tire antes de tudo : logo era
 necessario que houvesse hum metho-
 do para traçar perpendiculares.

Hum linha,
 que cabe so-
 bre outra ,
 sem pender
 sobre ella
 para alguma
 parte , he
 perpendicu-
 lar a esta li-
 nha.

IV.

Havia tambem precisão de as
 tra-

EST. I. traçar em huma infinidade de outras occasiões. Sabe-se, por exemplo, que a regularidade de figuras taes, como ABCD, FGHI, (Fig. 2. e 3.) chamadas rectangulos, compostas de quatro lados perpendiculares huns aos outros, obriga a dar as suas fórmas ás casas, aos seus interiores, aos jardins, ás salas, á cantaria das muralhas, &c.

O rectangulo he huma figura de quatro lados perpendiculares huns aos outros.

O quadrado he hum rectangulo, que tem os quatro lados iguaes.

A primeira ABCD destas figuras, cujos quatro lados são iguaes, chama-se commummente quadrado. A outra FGHI, que sómente tem os lados oppostos iguaes, tem o nome de rectangulo.

V.

Nas differentes operações, que pedem que se tirem perpendiculares, se trata ou de as abaixar sobre huma linha de hum ponto tomado fóra della, ou de as levantar de hum ponto posto sobre a mesma linha.

Se do ponto C, (Fig. 4.) tomado

do na linha AB, se quizer levantar a linha CD perpendicular a AB, será necessario que esta linha não penda para A, nem para B.

EST. I.
Modo de levantar huma perpendicular.

Suppondo-se pois que C esteja igualmente distante de A, e de B, e que a recta CD não penda para alguma parte, claro está que cada hum dos pontos desta linha estará igualmente distante de A, como de B; assim não faltará mais do que procurar hum ponto qualquer como D, de sorte que esteja em igual distancia de A, e de B; porque conduzindo pelo ponto C, e por este ponto D huma linha recta CD, será esta a perpendicular pedida.

Para se achar o ponto D, talvez que por tentativas se conseguisse; porém este modo não satisfaz o espirito, elle quer hum methodo, que o illumine. Ei-lo aqui.

Tomareis huma medida commua, huma corda, por exemplo, ou hum compasso com huma abertura determi-

6 ELEMENTOS

EST. I. minada, segundo o em que vós trabalhades, ou sobre terreno, ou sobre papel.

Tomada esta medida, fixareis no ponto A a extremidade da corda, ou a ponta do compasso; e fazendo gyrar a outra ponta, ou a extremidade da corda, traçareis o arco PDM. (Fig. 5.) Depois, sem mudar de medida, obrareis da mesma sorte respeito ao ponto B, e descrevereis o arco QDN, o qual cortando o primeiro arco em D, dará o ponto procurado.

Porque o ponto D pertencerá igualmente aos dous arcos PDM, QDN descritos por meio de huma medida commua, a sua distancia ao ponto A será igual á que ha ao ponto B. Assim CD não penderá para A, nem para B: logo esta linha será perpendicular sobre AB.

Se o ponto C se não achar em igual distancia de A, e de B, será necessario tomar outros dous pontos

a , e b igualmente distantes de C , EST. I.
e servir-vos delles em lugar de A ,
e de B , para descrever os arcos
PDM, QDN.

VI.

Se hum dos traços PDM for con-
tinuado por O , E , R , &c. (Fig. 4.)
até que venha ao mesmo ponto P ,
este gyro inteiro se chamará circum-
ferencia do circulo, ou simplesmen-
te circulo.

O circulo he
o traço in-
teiro, que
descreve a
ponta movel
de hum cõ-
passo, gy-
rando á ro-
da da outra
ponta.

Traçando-se sómente huma par-
te PDM da circumferencia, esta par-
te se chamará arco de circulo.

O ponto fixo A seu centro, ou
centro do circulo.

O centro he
o lugar da
ponta fixa.

E o intervallo AD o seu radio.

Toda a linha, como DAE , que
passa pelo centro A , e que se termi-
na na circumferencia, chama-se dia-
metro; he evidente que esta linha he

O radio he
o intervallo
das pontas
do compas-
so.

dupla do radio, donde vem que o
radio se chama ás vezes semidiame-
tro.

O diametro
he o dobro
do radio.

O

EST. I.

VII.

Modo de abaixar huma perpendicular.

O modo de levantar huma perpendicular de huma linha AB (Fig.6.) nos ensina o de abaixar sobre ella huma perpendicular de qualquer ponto E, tomado fóra da mesma linha; porque pondo em E a extremidade de hum fio, ou a ponta do compasso, e com o mesmo intervallo $E b$ finalando dous pontos a , e b sobre a linha AB, se procurará, como no Artigo precedente, outro ponto D, a distancia do qual ao ponto a , e ao ponto b seja a mesma; e por este ponto D, e pelo ponto E se tirará a recta DE, que tendo cada huma das suas extremidades igualmente distantes de a , e de b , e não pendendo mais para hum destes pontos do que para o outro, será perpendicular sobre AB.

VIII.

Da operação precedente se segue a solução de hum novo Problema.

Tra-

Tratando-se de dividir huma linha recta AB (Fig. 7.) em duas partes iguaes; dos pontos A, e B, tomados como centros, e com qualquer abertura de compasso, se descrevam os arcos REI, GEF, e depois dos mesmos centros, e com a mesma, ou qualquer outra abertura que se queira, se descrevam tambem os arcos PDM, QDN; e então a linha ED, que passará pelos pontos das secções E, e D, dividirá AB em duas partes iguaes no ponto C.

EST. I.
Cortar huma linha em duas partes iguaes.

IX.

Tendo-se achado o modo de traçar as perpendiculares, nada era mais facil do que servir-se delle para construir as figuras chamadas rectangulos, das quaes se fallou no Artigo IV. Bem se vê, que para construir hum quadrado ABCD, (Fig. 2.) que tenha os lados iguaes á linha dada K, he preciso tomar sobre a linha GE hum intervallo AB,

Construir hum quadrado sobre hum lado dado.

EST. I. AB, igual a K, depois levantar (Artigo V.) dos pontos A, e B as perpendiculares AD, BC, que seja cada huma igual a K, e depois tirar DC.

X.

Fazer hum rectangulo, do qual sejam dados o comprimento, e a largura.

Querendo-se traçar hum rectangulo FGHI, (Fig. 3.) cujo comprimento fosse K, e a largura L, farse-hia FG igual a K, depois se levantariam as perpendiculares FI, e GH cada huma igual a L, e depois se tiraria HI.

XI.

As parallelas são linhas sempre igualmente distantes umas das outras.

Na construcção das obras, como parapeitos, canaes, ruas, &c. he necessario tirar linhas parallelas, isto he, linhas a posição das quaes seja tal, que os seus intervallos tenham por toda a parte por medida perpendiculares do mesmo comprimento. Ora para tirar estas parallelas, parece-me que não ha cousa mais natural, do que recorrer ao methodo, de que nos servimos para tra-

çar

çar rectangulos. Seja AB, (Fig. 8.) EST. I.
 por exemplo, hum dos lados de
 hum canal, ou de hum parapeito,
 &c. ao qual se quizesse dar a largu-
 ra CA; ou, por exprimir a questãõ
 de outro modo mais geometrico, e
 mais geral, supponhamos que se quei-
 ra conduzir por C a parallela CD a
 AB: tomar-se-ha á vontade hum pon-
 to, como B, na linha AB, e se
 obrará do mesmo modo que se fa-
 ria, se tendo a base AB, se quizes-
 se fazer hum rectangulo ABCD, que
 tivesse AC por altura. Entãõ as li-
 nhas CD, AB, se fossem infinita-
 mente produzidas, seriam sempre
 parallelas, ou, que vem a ser o mes-
 mo, nunca se encontrariam.

Tirar hũa
 parallela a
 huma linha
 por hum
 ponto dado.

XII.

Pondo-se a regularidade das fi-
 guras rectangulares muitas vezes em
 execução, como dissemos, ha mui-
 tos casos, em que he necessario saber
 a sua extensão. Tratar-se-ha, por
 C exem-

EST. I. exemplo, de determinar quanto he preciso de tapeçeria para huma sala; ou quantas braças quadradas conterá hum terreno murado em fôrma de hum rectangulo, &c.

Bem se conhece, que para se chegar a esta forte de determinações, o meio mais simples, e mais natural he de nos servirmos de huma medida commua, que applicada muitas vezes sobre a superficie, que ha para medir, a cubra inteiramente: methodo, que vem a ser o mesmo, que já servio para determinar o comprimento das linhas.

Ora he evidente que a medida ordinaria das superficies deve ser em si mesma huma superficie, por exemplo, a de huma braça quadrada, de hum pé quadrado, &c. Assim medir hum rectangulo, he determinar o numero de braças quadradas, ou de pés quadrados, &c. que a sua superficie contém.

Ponhamos hum exemplo para il-
lu-

luminar o entendimento. Supponha-EST. I. mos que o rectangulo dado ABCD (Fig. 9.) tenha 7 palmos de altura sobre huma base de 8 palmos ; poder-se-ha considerar este rectangulo como repartido em sete bandas, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, e que cada huma contenha 8 palmos quadrados : será pois o valor do rectangulo sete vezes 8 palmos quadrados, ou 56 palmos quadrados.

Se agora nos lembrarmos dos primeiros elementos do calculo Arithmetico, que multiplicar dous numeros he tomar hum tantas vezes, como a unidade se contém no outro, achar-se-ha huma perfeita analogia entre a multiplicação ordinaria, e a operação, pela qual se mede o rectangulo. Ver-se-ha que multiplicando o numero de braças, ou de palmos, &c. que tiver a sua altura, pelo numero de braças, ou palmos, que der a sua base, se determinará a quantidade de braças

A medida de hum rectangulo he o producto da sua base pela sua altura.

EST. I. quadradas, ou de palmos quadrados, que contiver a sua superficie.

XIII.

As figuras, que ha para medir, não são sempre regulares, como o são os rectangulos; e não obstante isto, he muitas vezes necessario ter a sua medida: humas vezes será preciso saber a extensão de huma obra construida sobre hum terreno falto de regularidade; outras se quererá saber o que hum terreno irregularmente limitado conterà de braças quadradas: era pois necessario que ao methodo de determinar a extensão dos rectangulos se ajuntasse o de medir as figuras, que não são rectangulares.

Figuras rectilineas são aquellas, que se terminam em linhas rectas.

Vemos logo que na prática a difficuldade não está senão na medição das figuras rectilineas, taes como ABCDE, (Fig. 10.) isto he das figuras terminadas por linhas rectas; porque se no contorno de hum ter-
re-

reno se acham algumas linhas curvas, como na figura ABCDEFG, (Fig. 11.) he evidente que estas linhas repartidas em tantas partes, quantas forem necessarias para evitar todo o erro sensivel, se poderão sempre tomar por hum ajuntamento de linhas rectas.

Isto supposto, vê-se que não obstante a infinita variedade de figuras rectilneas, todas se podem medir do mesmo modo, repartindo-as em figuras de tres lados, chamadas ordinariamente triangulos; o que se fará da maneira a mais simples, e a mais cómoda, se de qualquer ponto A (Fig. 10.) do contorno da figura ABCDE se tirarem as linhas rectas AC, AD, &c. aos pontos C, D, &c.

O triangulo he huma figura terminada por tres linhas rectas.

XIV.

Logo não será preciso senão ter a medida dos triangulos, que se tiverem formado. Ora sabe-se, que
pa-

EST. I. para se achar o que se ignora, o meio mais seguro he de procurar se nas cousas, de que temos conhecimento, ha alguma, que se conforme com o que se quer saber; e já se tem visto que todo o rectangulo ABCD (Fig. 12.) he igual ao producto da sua base AB pela sua altura CB. Demais he facil de perceber, que esta figura cortada transversalmente pela linha AC, chamada diagonal, se acha repartida em dous triangulos iguaes; do que se infere, que cada hum destes triangulos igualará a metade do producto da sua base AB, ou CD pela sua altura CB, ou DA.

A diagonal de hum rectangulo he a linha, que o reparte em dous triangulos iguaes.

Os triangulos rectangulos são aquelles, que tem dous dos seus lados perpendiculares hum ao outro.

He verdade que quasi nunca succede que os triangulos, que ha para medir, tenham dous dos seus lados perpendiculares hum ao outro, como os triangulos ABC, ADC, chamados triangulos rectangulos; porém nada impede que se não possam reduzir todos a triangulos desta especie.

Por-

Porque se do ponto A, (Estampa II. Fig. 1.) vertice de hum triangulo qualquer ABC, se abaixar a perpendicular AD sobre a base BC, o triangulo ABC se achará repartido em dous triangulos rectangulos ABD, ADC.

Tornando pois ao que diffemos, he evidente, que como os dous triangulos ADB, ADC serão ametades dos rectangulos AEBD, ADCF, o triangulo proposto ABC será da mesma forte ametade do rectangulo EBCF, que terá BC por base, e AD por altura; e como a superficie do rectangulo EBCF igualará o producto da altura EB, ou AD pela base BC, o triangulo ABC terá por

Hum triangulo he a metade de hum rectangulo, que tem a mesma base, e a mesma altura.

Logo a sua medida he a metade do producto da sua altura pela sua base.

Temos pois o modo de medir todos os terrenos terminados por linhas rectas, pois que se não acha algum, que se não possa reduzir a tri-

EST. II. triangulos, e que dos vertices destes triangulos se sabe abaixar perpendiculares sobre as suas bases.

XV.

Do que dissemos no precedente methodo, que para medir os terrenos, ou as superficies dos triangulos bastava sómente servir-se das suas bases, e das suas alturas, sem attender ao comprimento dos seus lados, se tira esta proposição, ou theorema, que todos os triangulos, como ECB, (Fig. 2.) ACB, que tem huma base commua CB, e cujas alturas EF, AD são iguaes, tem a mesma superficie.

Os triangulos, que tem a mesma altura, e a mesma base, tem as superficies iguaes.

XVI.

Para facilitar a intelligencia do principio, que dá a medida dos triangulos, entendemos que não deviamos escolher por base senão hum lado, sobre o qual pudesse cahir a perpendicular abaixada do vertice opposto, o que sempre se póde fazer, quan-

quando sómente se trata da medição EST. II.
 dos terrenos. Mas porque na com-
 paração dos triangulos , que tem a
 mesma base , as perpendiculares abai-
 xadas dos seus vertices podem cahir
 fóra do triangulo , como na Figu-
 ra 3 , parece que seja necessario ver
 se os triangulos , taes como BCG,
 estam no caso dos outres ; isto he se
 elles são sempre a metade do rectan-
 gulo ECBF , que tem a perpendicu-
 lar GH por altura.

He facil o certificar-se disto , no-
 tando que o triangulo CGH , som-
 ma dos dous triangulos CGB , GBH ,
 he a metade do rectangulo ECHG ,
 somma dos dous rectangulos ECBF ,
 FBHG ; e que assim os dous triangu-
 los CGB , GBH valem ambos jun-
 tos a metade do rectangulo ECHG.
 Ora o triangulo GBH he metade
 do rectangulo FBHG : logo o trian-
 gulo proposto BCG he metade do
 outro rectangulo ECBF , que tem
 BC por base , e GH por altura.

A

EST. II.

XVII.

Os triângulos, que tem a mesma base, e estão entre as mesmas parallelas, são iguaes em superficie.

A proposição demonstrada nos tres Artigos precedentes tambem se pôde expôr geralmente nestes termos: Os triângulos EBC, (Fig. 4.) ABC, GBC são iguaes; quando elles tem huma base commua BC, e que estão entre as mesmas parallelas EAG, CBH, isto he, quando os seus vertices E, A, G estão em huma mesma linha recta EAG, parallela á recta CB, porque então (Artigo XI.) as suas alturas medidas pelas perpendiculares EF, AD, GH são as mesmas.

XVIII.

Entre as differentes figuras rectilincas, que se sabem medir pelo methodo precedente, ha algumas, que se approximam á regularidade dos rectangulos, que são os espaços taes como ABCD (Fig. 5.) terminados por quatro lados, dos quaes cada

hmm

hum he parallelo ao lado, que lhe está opposto. Estas figuras se chamão parallelogramos; ellas são mais facéis de medir, do que as outras figuras rectilíneas, exceptuando os rectangulos; porque repartindo o parallelogramo ABCD em dous triangulos ABC, ACD, estes dous triangulos serão visivelmente iguaes: ora como cada hum destes triangulos valerá a metade do producto da sua altura AF pela base BC, o parallelogramo terá por medida o producto inteiro da base BC pela altura AF.

EST. II.

Os parallelogramos são figuras de quatro lados, da qual os dous oppostos são parallelos.

Medem-se, multiplicando o producto da sua base pela sua altura.

XIX.

Do que se segue, que todos os parallelogramos ABCD, (Fig. 6. ou 7.) EBCF, que tiverem huma base commua, e estiverem entre as mesmas parallelas, serão iguaes; o que he facil de ver ainda independentemente do que precede, notando que o parallelogramo ABCD se mudará no parallelogramo EBCF, ajuntan-

do- Os parallelogramos, que tem huma base commua, e que estão entre as mesmas parallelas, são iguaes em superficie.

EST. II. do-se-lhe o triangulo DCF, e tirando o triangulo ABE da figura inteira ABCF; que assim, suppondo-se serem iguaes os dous triangulos DCF, ABE, será evidente que o parallelogramo ABCD não terá mudado de extensão, mudando-se em EBCF. Ora para nos certificarmos da igualdade destes dous triangulos, bastará observar que AB, e CD, sendo parallelas, como tambem BE, e CF, o triangulo ABE não será outra cousa senão o triangulo DCF, que se terá adiantado, segundo a direcção da sua base, de sorte que o ponto A terá chegado a D, e E a F.

XX.

Ha tambem outras figuras rectilneas, que são faccis de medir, e que se chamam polygonos regulares, figuras, que se terminam em lados iguaes, que todos tem a mesma inclinação huns sobre os outros. Taes são

Os polygonos regulares são figuras terminadas por lados iguaes,

são as figuras ABDEF, ABDEFG, EST. II. e igualmente inclinados huns sobre os outros.

ABDEFGH. (Fig. 8, 9, e 10.)
 Como se costuma dar a fórma fymmetrica destas figuras aos tanques, aos chafarizes, ás praças públicas, &c. parece que antes de as ensinar a medir seja preciso ver de que modo ellas se tração.

XXI.

Descreva-se huma circumferencia de circulo; reparta-se em tantas partes iguaes, quantos forem os lados, que se quizer dar ao polygono; depois tirem-se as linhas (Fig. 8.) AB, BD, DE, &c. pelos pontos A, B, D, E, &c. que dividindo a circumferencia, darão o polygono, que se quer, o qual se chamará pentagono, ou hexagono, ou heptagono, ou octogono, ou enecagono, ou decagono, &c. segundo tiver, cinco, ou seis, ou sete, ou oito, ou nove, ou dez, &c. lados.

Mateira de descrever hum polygono, de hum numero determinado de lados.

O pentagono tem 5 lados, o hexagono 6, o heptagono 7, o octogono 8, o enecagono 9, o decagono 10

Pa-

EST. II.

XXII.

Medida da
superfície de
hum poly-
gono regu-
lar.

O apothêma
he a perpen-
dicular abai-
xada do cen-
tro da figura
sobre hum
dos seus la-
dos.

Para se ter a medida de hum polygono regular, podia-se usar do methodo, que já se deo (Artigo XIII.) para todas as figuras rectilíneas; porém facilmente se vê, que o mais breve he repartir o polygono em triangulos iguaes, que tenham todos o centro C (Fig. 10.) por vertice; e porque tomando hum destes triangulos, CBD por exemplo, e tirando sobre a base BD a perpendicular CK, que então se chamará o apothêma do polygono, como a área do triangulo valerá o producto da base BD pela metade de CK, este producto tomado tantas vezes quantas forem os lados do polygono, dará a área da figura inteira.

XXIII.

Repartindo-se a circumferencia do circulo em tres partes iguaes, se formaria hum triangulo chamado
com-

communmente triangulo equilatero; repartindo-se esta circumferencia em quatro partes iguaes, se formaria hum quadrado; porém estas duas figuras as mais simples de todos os polygonos, se podem facilmente traçar, sem que seja necessario recorrer á divisão do circulo, como já se vio (Artigo IX.) para o quadrado. Respeito ao triangulo equilatero, he facil de perceber, que para o descrever sobre humna base dada AB, (Fig. 11.) he necessario que dos pontos A, e B, como centros, e com humna abertura de compasso igual a AB, se tracem os arcos DCF, e GCH; e que depois se tirem dos pontos A, e B as linhas AC, BC ao ponto C, secção commua dos dous arcos DCF, GCH, e vertice do triangulo.

EST. II.
O triangulo equilatero he aquelle, que tem os tres lados iguaes.

Modo de descrever o triangulo equilatero.

XXIV.

Ao methodo de descrever geometricamente o triangulo equilatero, e o quadrado, que são os primeiros

EST. II. ros de todos os polygonos , poderia eu ajuntar o de traçar geometricamente hum pentagono , como muitos Authores fizeram nos Elementos , que nos deram ; mas porque os Principiantes , para quem sómente aqui trabalhamos , não perceberiam , senão com trabalho , o caminho , que o entendimento devia seguir , procurando a maneira de traçar esta figura , caminho , que a Algebra nos põe em estado de descobrir , será melhor deixar a descripção do pentagono para o Tratado , que a este se seguirá , no qual se ajuntará á descripção delles a de todos os mais polygonos , que tiverem maior numero de lados , que sem o soccorro da Algebra se não poderiam descrever geometricamente.

Dos polygonos , que tem mais de cinco lados , dos quaes digo que não se podem descrever senão por meio do calculo Algebraico , he preciso exceptuar os de 6 , de 12 , de

24 , de 48 , &c. lados ; e os de 8 , EST. II.
 de 16 , de 32 , de 64 , &c. lados ,
 que facilmente se podem descrever
 pelos methodos , que dá a Geome-
 tria elementar , como se verá no fim
 desta primeira Parte.

XXV.

Tórno á medição dos Terrenos ;
 e vejo que aquelles , que se querem
 medir , são muitas vezes taes , que
 não admittem as operações , que os
 methodos precedentes prescrevem.

Supponho que ABCDE (Fig. 12.)
 seja a figura de hum campo , de hum
 circuito , &c. do qual se quererá ter
 a medida. Segundo o que se tem vis-
 to , seria preciso repartir ABCDE em
 triangulos , como ABC , ACD ,
 ADE , e então medir estes triangu-
 los , depois de ter abaixado as per-
 pendiculares EF , CH , BG ; porém
 se no espaço ABCDE se encontra
 algum obstaculo , huma elevação ,
 hum bosque , hum lago , &c. que
 D im-

EST. II. impede tirarem-se as linhas, que se precisam, que se fará então? que methodo será necessario seguir para remediar este inconveniente do terreno? O methodo, que logo se apresenta á idéa, he o de escolher algum terreno plano, onde se possa á vontade trabalhar, e descrever sobre elle triangulos iguaes, e semelhantes aos triangulos ABC, ACD, &c. Vejamos como nos haveremos para formar os novos triangulos.

XXVI.

EST. III. Principiemos, suppondo que o obstaculo se acha no interior do triangulo ABC, (Estampa III. Fig. 1.) cujos lados sejam reconhecidos; e que se queira traçar hum triangulo igual, e semelhante sobre o terreno escolhido: descreva-se huma linha DE (Fig. 2.) igual ao lado AB, e tomando hum cordel do comprimento BC, firmando huma das suas extremidades em E, se descreva o

ar-

Tendo-se reconhecido os tres lados de hum triangulo, fazer outro, que lhe seja igual.

arco IFG, do qual será radio o cor- EST. III.
 del; depois por meio de outro cor-
 del igual a AC, do qual se firmará
 tambem huma das pontas em D, se
 traçará o arco KFH, que cortará o
 primeiro em F; então tirando as li-
 nhas DF, e FE, se terá o triangulo
 DEF, igual, e semelhante ao trian-
 gulo proposto ABC; o que he evi-
 dente, porque os lados DF, e EF,
 que se unirão no ponto F, sendo
 respectivamente iguaes aos lados AC,
 e BC, unidos no ponto C, e a base
 DE tendo-se medido igual a AB,
 não será possível que a posição das
 linhas DF, e EF sobre DE seja diffe-
 rente da posição das linhas AC, e BC
 sobre AB. He verdade que se podiam
 tomar as linhas *Df*, *Ef* por baixo
 de DE; porém o triangulo seria o
 mesmo, só seria simplesmente ás a-
 véssas.

XXVII.

Não sendo possível medir senão
 dous dos tres lados do triangulo
 D ii ABC,

EST. III. ABC , (Fig. 3.) por exemplo, os dous lados AB , BC , claro está que com isto sómente não se poderia descrever outro triangulo igual, e semelhante a ABC ; porque ainda que se tivesse tomado DE , (Fig. 4.) igual a BC , (Fig. 3.) e DF igual a BA , não se saberia que posição se havia de dar a DF relativamente a BA . Para se tirar esta difficuldade, o modo, que se apresenta, he simples: da mesma sorte se faz pender DF sobre DE , como AB pende sobre BC ; ou, por exprimir a cousa como os Geometras, ao angulo FDE se dá a mesma abertura, que tem o angulo ABC . *

Hum angulo he a inclinação de huma linha sobre a outra.

XXVIII.

Para se fazer esta operação, toma-se hum instrumento tal como *a b c* composto de duas regras, que se

* Quando hum angulo se aponta com tres letras, a do meio está no vertice do angulo; a primeira, e a ultima nas extremidades dos lados.

se possam mover ao redor do ponto *b*, e se applicam estas regras sobre os lados *AB*, e *BC*. Desta forte fazem ellas entre si o mesmo angulo, que fazem os lados *AB*, e *BC*. Pondo pois a regra *bc* sobre a base *DE* (Fig. 4.) de forte que o centro *b* corresponda ao ponto *D*, e que a abertura do instrumento seja sempre a mesma, a regra *ab* dará a posição da linha *DF*, a qual fará com a linha *DE* o angulo *FDE* igual ao angulo *ABC*. Ora a linha *DF* ter-se-
 ha tomado do mesmo comprimento de *AB*: logo não faltará mais do que tirar de *F* a *E* a recta *FE* para se ter o triangulo *FDE* inteiramente igual, e semelhante ao triangulo *ABC*. Prática simples, pela qual se supõe este principio evidente, que
 hum angulo he determinado pelo comprimento de dous dos seus lados; e pela abertura delles; ou, que he o mesmo, que hum triangulo he
 igual a outro, quando dous dos seus

EST. III.

Dados dous lados, e o angulo comprehendido, está o triangulo determinado.

la-

EST. III. lados são respectivamente iguaes, e que o angulo comprehendido entre estes lados he igualmente aberto.

XXIX.

Tambem se poderia fazer o angulo FDE (Fig. 6.) igual ao angulo ABC (Fig. 5.) da maneira seguinte.

Segunda maneira de fazer hum angulo igual a outro.

Do centro B, e com qualquer intervallo Ba descrevei o arco *ah* *c*: c do centro D, (Fig. 6.) e com o mesmo intervallo, traçai o arco *eif*; então não vos faltará mais do que procurar hum ponto *f*, que esteja no arco *eif*, do mesmo modo que *a* se acha no arco *cha*.

A corda de hum arco de circulo he a recta, que se termina nas duas extremidades do arco.

Ora vós facilmente achareis o ponto *f*, servindo-vos da recta *ac*, que, segundo a definição ordinaria, se chamará a corda do arco *ahc*.

Porque se do centro *e*, e com hum intervallo igual a *ac* descreverdes o arco *kfl*, a secção dos dous arcos *eif*, *kfl* vos dará o ponto procurado *f*.

Ti-

Tirai depois por D , e f a linha EST. III.
 DfF , e tercis o angulo FDE igual
 ao angulo ABC . O que he evidente,
 (Artigo XXVI.) pois que os trian-
 gulos Bac , Dfe serão inteira-
 mente iguaes, e semelhantes em to-
 das as suas partes.

XXX.

Se quando se quer fazer o trian-
 gulo FDE (Fig. 4.) igual ao trian-
 gulo ABC , (Fig. 3.) succede que
 se não póde medir senão hum dos la-
 dos, BC por exemplo, recorre-se
 aos angulos ABC , e ACB . Tendo
 feito DE igual a BC , situão-se as
 linhas DF , e FE , de forte que ellas
 façam com DE os mesmos angulos
 que AB , e AC fazem com BC : en-
 tão pelo encontro destas linhas se tem
 o triangulo FDE igual, e semelhan-
 te ao triangulo ABC . O principio,
 que suppõe esta proposição, he de si
 mesmo tão simples, que não precisa
 de demonstração.

Dous angu-
 los, e hum
 lado deter-
 minam o
 triangulo.

Se

EST. III.

XXXI.

Triangulo
ifoscele he
aquelle, que
tem dous la-
dos iguaes.

Se dos tres lados do triangulo ABC (Fig. 7.) se não pudesse medir senão a base BC, e que demais se foubesse que este triangulo era ifosceles, isto he, que os dous lados AB, e AC fossem iguaes, he evidente que bastaria medir hum dos dous angulos ABC, ACB, porque então o outro lhe seria igual.

Facilmente se conhece a razão disto, se nos representarmos o que succederia, suppondo que os dous lados AB, AC do triangulo ABC (Fig. 7.) estivessem primeiramente deitados sobre BD, e sobre CE, prolongações da base BC, e que depois se levantassem para unir as suas extremidades no ponto A; porque então a igualdade destes dous lados os impediria de andar hum mais do que o outro: logo estando unidos penderiam igualmente sobre a base BC: logo o angulo ABC será igual ao angulo ACB.

Os angulos,
que estes la-
dos fazem
com a base,
são entre si
iguaes.

Ter-

XXXII.

Tornando á medição dos terrenos, se verá que quacsquer que sejam os obstaculos, que se possam encontrar no interior delles, será facil pelo precedente methodo de transportar para hum terreno desembaraçado todos os triangulos, os quaes repartirão o espaço que se quizer medir.

Supponhamos, por exemplo, que quizeis medir hum bosque, cuja figura fosse ABCDEFG. (Fig. 8.)

Construirêis logo hum triangulo igual a ABC, o que podeis fazer sem entrar no interior deste triangulo, medindo os dous lados AB, BC, e o angulo nelles comprehendido CBA.

Este triangulo descripto dará o angulo BCA, e o comprimento de AC; e como vós podeis medir o lado exterior DC, tereis no triangulo CAD os lados DC, e CA. Quan-

to

EST. III. to ao angulo DCA , vós o acharêis, tomando logo o angulo IKL (Fig. 9.) igual ao angulo DCB , depois o angulo LKO , igual ao angulo BCA , o que vos dará o angulo, que resta IKO , igual ao angulo procurado DCA .

O triangulo ADC , sendo assim determinado pelos dous lados DC , e CA , e pelo angulo comprehendido DCA , vós conhecerêis do mesmo modo o triangulo DAG , e o resto da figura.

XXXIII.

Do methodo, que se tem dado para se medirem os terrenos, em que se não poderiam tirar linhas, nascem muitas vezes grandes difficuldades na prática. Raras vezes se acha hum espaço plano, e desembaraçado, que seja bastantemente grande, para nelle se fazerem os triangulos iguaes aos do terreno, que se quer medir. E ainda quando este se
achaf-

achasse, o grande comprimento dos EST. III. lados dos triangulos poderiam fazer que as operações fossem summamente difficultosas : abaixar huma perpendicular sobre huma linha de hum ponto distante della sómente, v. gr. 500 braças, sería huma obra muito penosa, e talvez impraticavel. Importa pois que haja hum meio, que suppra estas grandes operações.

Este meio quasi por si mesmo se offerece : logo vem á imaginação o representar a figura que ha para medir *ABCDE*, (EST. IV. Estampa IV. Fig. 1. e 2.) em huma figura semelhante *a b c d e*, porém mais pequena, na qual, por exemplo, o lado *a b* seja de 100 pollegadas, se o lado *AB* he de 100 braças; o lado *b c* de 45 pollegadas, se *BC* he de 45 braças, e daqui concluir depois, que se a extensão da figura reduzida *a b c d e* tem 60000 pollegadas quadradas, a da figura *ABCDE* deve ser de 60000 braças quadradas.

Po-

EST. IV. Porém primeiro que tudo, he necessario saber em que consiste a semelhança de duas figuras.

XXXIV.

Em que
consiste a se-
melhança
de duas fi-
guras.

Ora por pouco que nisto se faça reflexão, logo se verá que as duas figuras $ABCDE$, $abcde$, para serem semelhantes, devem ser taes, que os angulos A, B, C, D, E da grande sejam iguaes aos angulos a, b, c, d, e da pequena; e que demais os lados ab, bc, cd , &c. da pequena contenhão tantas partes de p , quantas os lados AB, BC, CD , &c. da grande contém de partes P .

XXXV.

Para exprimir esta segunda condição, dizem os Geometras que he necessario que os lados AB, BC, CD , &c. sejam proporcionaes aos lados ab, bc, cd , &c.; ou que o lado AB contenha ab , da mesma sorte que BC contém bc , &c.; ou que
o la-

o lado AB seja tão grande respectivamente a ab , como BC o he respectivamente a bc , &c.; ou tambem que alli haja a mesma razão, ou a mesma relação entre AB, e ab , como entre BC, e bc , &c.; ou finalmente, que AB seja para ab , como BC para bc , &c. Tudo isto são modos differentes de explicar a mesma cousa; porém he preciso familiarizar-se com elles para se entender a linguagem dos Geometras.

XXXVI.

Depois de se ter visto em que consiste a semelhança de duas figuras, vejamos qual seja o caminho, que a natureza nos indica para traçar huma figura semelhante a outra. Para o que representemo-nos hum Desenhador, que quer copiar huma figura, reduzindo-a.

Modo de fazer huma figura semelhante a outra.

Logo tomando elle ab , para representar a base AB da figura que tem para copiar ABCDE, inclina sobre

ab

EST. IV. *ab* os lados *ae*, e *bc*, do mesmo modo que *AE*, e *BC* estão inclinados sobre *AB*; com tanto que os comprimentos de *ae*, e de *bc* sejam para o de *ab*, como os comprimentos de *AE*, e de *BC* os são para o de *AB*; isto he, que se *AE*, por exemplo, he a metade de *AB*, elle faz *ae* igual á a metade de *ab*, e usa da mesma sorte para determinar o comprimento de *bc* relativamente a *BC*.

Tendo elle assim determinado os pontos *e*, e *c*, traça as linhas *ed*, e *cd*, inclinando-as sobre *ea*, e sobre *cb*, da mesma sorte que *ED*, e *CD* estão inclinadas sobre *EA*, e *CB*; e prolongando estas linhas até que ellas se encontrem em *d*, acaba a sua figura *abcde*.

XXXVII.

Faça-se agora reflexão sobre a construcção desta figura, e ver-se-ha que ella não he fundada senão na igualda-

dade que ha entre os angulos E, EST. IV.
 A, B, C, e e, a, b, c , e na propor-
 cionalidade dos lados EA, AB,
 BC, e dos lados ea, ab, bc , que
 assim se acha a figura terminada,
 sem que se tenha tomado o angulo
 d igual ao angulo D, nem os lados
 ed, cd proporcionaes aos lados ED,
 CD; reflexão esta, que á primeira
 vista faria duvidar que o angulo d
 não fosse com effeito igual ao angulo
 D, nem os lados ed, cd proporcio-
 naes aos lados ED, CD; e que por
 consequencia a figura $abcde$ não se
 achasse inteiramente semelhante á fi-
 gura ABCDE; mas quando não hou-
 vesse mais do que a experiencia pa-
 ra nos certificarmos disto, esta dúvi-
 da se dissiparia logo; além de que,
 por pouca attenção que nisto se fa-
 ça, bem se vê que da igualdade res-
 pectiva dos quatro angulos E, A,
 B, C, e e, a, b, c , e da propor-
 cionalidade dos tres lados EA, AB,
 BC, e ea, ab, bc resulta necessa-
 ria-

EST. IV. riamente a igualdade dos angulos D, d , e a proporcionalidade dos lados ED, CD , e ed, cd .

Não obstante, para tirar toda a dúvida, mostraremos que todas as condições, que pede a semelhança das figuras, são necessariamente dependentes humas das outras; o que nos será facil de fazer, examinando logo os triangulos, que são as figuras mais simples, e que entram necessariamente na composição de todas as mais, cujo exame nos conduzirá a todas as propriedades, e a todos os usos das figuras semelhantes.

XXXVIII.

Se dous angulos de hũ triangulo são iguaes a outros dous do outro triangulo, o terceiro angulo de hum igualará o terceiro angulo do outro.

Supponhamos que sobre a base ab (Fig. 3. e 4.) se trace o triangulo abc ; e não tomando senão os angulos cab, cba , iguaes aos angulos CAB, CBA do triangulo ABC , haverá primeiramente a certeza, que o terceiro angulo acb igualará o terceiro angulo ACB .

Por-

Porque pondo-se o triangulo *abc* EST. IV, sobre o triangulo ABC, de sorte que o ponto *a* fique sobre o ponto A, *ab* sobre AB, e *ac* sobre AC, claro está que o lado *cb* será paralelo a CB; e isto porque o lado *cb* prolongado não poderia encontrar-se com o lado CB, sem que as duas linhas pendessem desigualmente sobre AB; e que por consequencia os angulos *cba*, e CBA fossem desiguaes, o que seria contra a supposição.

Como da igualdade dos angulos *cba*, e CBA se seguirá que as linhas *cb*, CB serão parallelas, do parallelismo destas linhas se seguirá tambem que os angulos A*cb*, ACB serão iguaes, que he o que se pretendia provar.

XXXIX.

Agora mostremos que os lados, que se correspondem em dous triangulos *acb*, e ACB, que tem os mesmos angulos, são proporcionaes.

E

Pa-

Dous triangulos, cujos angulos são respectivamente iguaes, tem os seus lados proporcionaes.

EST. IV.

Para nos certificarmos disto, supponhamos que ab seja a metade de AB ; será preciso que provemos que ac será também a metade de AC , e bc a metade de BC . Que acb , como no Artigo precedente, tenha também a posição de $Ac b$: se se tirar cg paralela a AB , claro está que esta linha igualará bB , ou Ab ; e que gB igualará também cb . Ora como os angulos cgC , e Ccg serão manifestamente iguaes aos angulos cbA , e $cA b$, o triangulo Ccg igualará o triangulo cAb . (Artigo XXX.) Logo Cc será igual a Ac , e Cg igual a cb , ou a gB . Logo Ac , ou ac será a metade de AC , e cb a metade de CB .

Se ab (Fig. 3. e 5.) estivesse comprehendido tres, quatro, ou qualquer outro numero de vezes, que se quizesse, em AB , seria igualmente facil de demonstrar, que ac seria comprehendido o mesmo numero de vezes em AC , e cb em CB . Porque

que dos pontos de divisão b, f da EST. IV. base AB , tirando bc, fh , &c. parallelas a BC , se poderiam pôr pelo comprimento de AC tres, quatro, &c. triangulos $Ac b, ch g, h C i$, &c. iguaes ao triangulo $ac b$.

Mas ainda que ab em lugar de ser comprehendido exactamente hum numero certo de vezes em AB , (Fig. 3. e 6.) o fosse com algum quebrado, por exemplo, duas vezes e meia, provar-se-hia que ac caberia tambem duas vezes e meia em AC , e bc duas vezes e meia em BC .

Porque quando por meio das parallelas bc , (Fig. 6.) fh se tivesse posto pelo comprimento de AC , os dous triangulos $Ac b, ch g$, iguaes a $ac b$, ficaria lugar entre as duas parallelas hf , e CB , para se pôr hum triangulo $Ch i$, cujos lados seriam metades dos lados de $c A b$; o que he evidente, pois que pela supposição, $f B$ feria a metade de

E ii

 Ab ,

EST. IV. Ab , e que a base hi do triangulo $Ch i$ igualará fB , por causa das parallelas hf , CB : logo, em geral, quando dous triangulos ABC , abc tem os mesmos angulos, estes triangulos chamados triangulos semelhantes, tem os seus lados proporcionaes; ou, que he absolutamente o mesmo, os lados AB , BC , AC , de hum destes triangulos, ABC contém o mesmo numero de partes P , como os lados ab , bc , ac , do outro triangulo abc , contém de partes p . P , sendo o palmo, a braça, &c. ou em geral o petipé, com o qual ABC foi construido; e p aquelle, com que se construiu abc .

XL.

Da proposição, que acabamos de demonstrar, se tira naturalmente a solução de hum problema, que he muitas vezes util na prática.

Dividir huma linha em quantas partes iguaes se quizer.

Pede-se que huma linha se divida em hum numero dado de partes iguaes,

iguaes, o que na verdade se poderia EST. IV.
fazer por tentativas; porém já mais
com aquella segurança, que nos dá
a exacção geometrica.

Supponhamos, por exemplo, que
temos para dividir AB (Fig. 5.) em
tres partes iguaes; principia-se, ti-
rando huma linha indefinita AC,
que faça hum angulo, qualquer que
seja, com AB; depois põem-se so-
bre esta linha tres partes iguaes A
c, *ch*, *h* C com huma abertura de
compasso tomada á vontade; logo
tirando a linha CB, se tiram a esta
recta as parallelas *cb*, *hf*; desta for-
te AB, cortada nos pontos *b*, *cf*, se
acha repartida em tres partes iguaes;
o que he manifesto pelo Artigo pre-
cedente.

XLI.

Se se quizer dividir huma linha
em hum numero de partes, que te-
nha quebrados, como duas e meia,
tres e hum quarto, &c. ou tambem
que

Que cousa
seja huma
quarta linha
proporcio-
nal a outras
tres, e como
se acham.

EST. IV. que em geral se propuzesse o dividir a linha AB no ponto b , (Fig. 6.) de sorte que AB fosse para Ab , como a linha NO para a linha MQ ; tambem se vê que a solução do problema dependeria do Artigo XXXIX; isto he, que seria necessario tirar pelo ponto A huma recta qualquer que seja, tomar sobre esta recta Ac , e AC , iguaes a MQ , e a NO , depois tirar cb parallela a CB ; e então o ponto b seria o ponto procurado.

Os Geometras exprimem de outro modo o problema, que acabamos de resolver. Achar a tres linhas NO , MQ , AB a quarta proporcional.

XLII.

As alturas dos triangulos semelhantes são proporcionaes aos seus lados.

He evidente que dous triangulos semelhantes ABC , (Fig. 7. e 8.) abc terão não sómente os seus lados proporcionaes, mas que as perpendiculares CF , cf , que se abai-

xarem dos seus vertices C, c , sobre EST. IV. as bases AB, ab , seguirão também a proporção dos lados; o que he tão facil de demonstrar pelo que precede, que deixamos de nos demorar nisto.

XLIII.

Quanto á área dos triangulos semelhantes ABC, abc , vê-se que a do primeiro conterà tantos quadrados X feitos pela medida P , como a área do segundo conterà de quadrados x feitos pela medida p . Porque como CF , e AB terão, pelo Artigo precedente, tantas partes P , quantas cf , e ab terão de p ; a metade do producto de CF por AB , medida de ABC , (Artigo XIV.) dará o mesmo numero, como o que resultará da metade do producto de cf por ab medida de abc ; porém com esta differença, que CF , e AB , contando-se por partes P , o seu producto se contará por quadrados

EST. IV. dos X ; e que cf , e ab , que se contarão por partes p , darão hum producto, que se contará por quadrados x .

XLIV.

O que acabamos de dizer sobre a medida dos triangulos semelhantes, serve de prova a huma proposição, que nos Elementos de Geometria se exprime ordinariamente desta sorte. Os triangulos semelhantes

As áreas dos triangulos semelhantes são entre si, como os quadrados dos seus lados homologos.

ABC , abc são entre si como os quadrados $ABDE$, $abde$ dos seus lados homologos, ou correspondentes AB , ab .

A demonstração, que o Artigo precedente contém, traz absolutamente esta consequencia; porque o quadrado $ABDE$, contendo tanto de X , como $abde$ contém de x , he evidente que os dous numeros de quadrados X , que exprimem a relação do triangulo ABC , para o quadrado $ABDE$, são os mesmos, que

OS

os numeros de quadrados \propto , que EST. IV. dam a relação do triangulo abc para o quadrado $abde$; ou, o que vem a fer o mesmo, que o triangulo ABC he para o quadrado ABDE, como o triangulo abc para o quadrado $abde$.

Disto se segue, que se, por exemplo, o lado AB fosse duplo do lado ab , o triangulo ABC seria quadruplo do triangulo abc ; que se AB fosse triplo de ab , o triangulo ACB seria nove vezes maior do que o triangulo abc , &c.; porque AB não pôde fer duplo de ab , sem que o quadrado ABDE seja quadruplo de $abde$, &c.

XLV.

Para passar agora dos triangulos ás mais figuras, supponhamos que a cada hum dos triangulos semelhantes ABD, (Fig. 1. e 2.) abd se ajuntem outros dous triangulos ADE, e BDC, ade , cbd , os dous primei-

A mesma
EST. IV.
Propriedades das figuras semelhantes

ROS

EST. IV.
tes, tiradas
das dos tri-
angulos.

ros semelhantes aos segundos, ver-
se-ha que nas figuras totaes ABCDE,
abcde,

1.º Os angulos A, B, C, D, E
serão os mesmos, que são os angu-
los *a, b, c, d, e*; o que he eviden-
te, pois que huns, e outros serão
ou angulos correspondentes de trian-
gulos semelhantes, ou angulos com-
postos destes angulos corresponden-
tes.

2.º Ver-se-ha que a proporção dos
lados homologos, ou corresponden-
tes DE, *de*, BC, *bc*, &c. das fi-
guras ABCDE, *abcde*, será neces-
sariamente a mesma; isto he, que
se P, por exemplo, se acha hum
certo numero de vezes na base AB,
e que *p* se acha o mesmo numero de
vezes em *ab*; P, e *p* serão tambem
comprehendidos hum mesmo nume-
ro de vezes em dous lados homolo-
gos, quaesquer que sejam DE, e *de*;
pois por causa da semelhança dos
triangulos ABD, *abd*, a quantida-
de

de de P, que contiver AD, iguala- EST. IV.
rá a quantidade de p comprehendida em ad ; então considerando estes lados como bases dos triangulos semelhantes ADE, ade , o numero de partes P comprehendidas em DE, será o mesmo que for o numero de partes p , que conterà o lado de .

3.º Ver-se-ha tambem, que se nas duas figuras se tirarem as linhas correspondentes, taes como CE, ce , ou as perpendiculares DF, df , &c. estas linhas estarão sempre entre si na mesma razão em que estiverem os lados homologos das duas figuras.

Logo as figuras ABCDE, $abcde$ serão inteiramente semelhantes em todas as suas partes.

XLVI.

Tendo-se assim descripto a figura $abcde$ perfeitamente semelhante á figura ABCDE, he evidente que se se quizesse traçar de novo huma
fi-

EST. IV. figura inteiramente igual a $abcde$, e por consequencia tambem semelhante a $ABCDE$, seria inutil o medir todos os lados, e todos os angulos de $abcde$; mas que bastaria, por exemplo, tomar os tres lados ab , ea , bc , e os quatro angulos e , a , b , c , e com isto sómente feriamos certos de traçar a mesma figura $abcde$, semelhante a $ABCDE$; o que fórma huma demonstração completa daquillo, que sómente se presume. (Artigo XXXVII.) Mas pôde-se ir mais adiante; porque claro está que sempre haverá diferentes modos de combinar a quantidade dos angulos, e das linhas, que necessariamente se devem medir em qualquer figura, para della se fazer outra, que lhe seja proporcional; porém fatigariamos ao Leitor, querendo tratar este ponto mais diffusamente.

XLVII.

As áreas das
figuras se-

Com discursos semelhantes aos
do

do Artigo XLIII. se demonstraria que o numero de quadrados X , que contém a figura $ABCDE$, he o mesmo que o de quadrados x comprehendidos na figura $abcde$; e que assim as áreas das figuras semelhantes são entre si como os quadrados dos seus lados homologos.

EST. IV:
melhantes
são entre
si, como os
quadrados
dos lados
homologos.

XLVIII.

Tudo o que acabamos de dizer sobre as figuras semelhantes, se pôde reduzir a este só, e unico principio, que as figuras semelhantes não differem humas das outras, senão pelos petipés, por onde ellas são construidas.

As figuras
semelhantes
não são dif-
ferençadas
senão pelos
petipés, por
onde ellas
foram con-
struidas.

XLIX.

Agora para melhor se conhecer o uso, que se deve fazer dos triangulos semelhantes, e das reduções, para se ter a medida dos terrenos, sobre os quaes se não poderia commodamente trabalhar, figuremo-nos que
AB-

EST. V. ABCDEF (Estampa V. Fig. 1. e 2.) represente o contorno de huma Quinta, de hum Lago, &c. do qual se quizesse saber a extensão. Medir-se-ha logo hum dos lados da figura FE, por exemplo, e ver-se-ha quanto elle terá de varas, de braças, &c. depois tomando o petipé da grandeza que se quizer, se traçará sobre hum papelão, ou papel huma linha *fe*, igual a tantas parres do petipé, quantas FE contiver de varas, de braças, &c.; e fazendo os angulos *def*, *dfe* iguaes aos angulos DEF, DFE, se terá o triangulo *edf*, no qual se abaixará *eg*, perpendicular a *df*: isto feito, e as linhas *df*, e *eg*, sendo medidas por meio do petipé, se concluirá que tantas partes reduzidas conterão estas linhas, como DF, e EG conterão de braças, de varas, &c. Assim multiplicando DF por a metade de EG, se saberá o valor do triangulo EDF; e medindo do mesmo modo cada hum

hum dos outros triangulos DCF, EST. V;
BCF, ABF, a área da figura toda
se achará determinada.

L.

Succede muitas vezes na prática Maneira de
medir a dif-
tancia de
hum lugar
inaccessivel.
fer preciso medir-se a distancia que
ha do lugar F, onde se está, a ou-
tro lugar, onde algum obstaculo im-
pede que se possa ir ; novo Proble-
ma ; porém já a sua solução se deo
anticipadamente no Artigo , que
a este precede ; porque se para se
medir DF não houve necessidade,
senão da semelhança dos triangulos
def, e DEF, claro está que medin-
do-se qualquer base EF, e poden-
do-se descobrir dos pontos F, e E
o ponto D, estará o Problema re-
solvido , isto he, se terá a distan-
cia FD.

LI.

O uso , que se póde fazer dos
instrumentos particulares, taes como
bAc,

EST. V.

b A c, (Fig. 3.) que eu disse, (Artigo XXVIII.) composto de duas regras unidas no ponto *A*, á roda do qual ellas podem circular, traz consigo varios inconvenientes. Humas vezes a abertura do angulo se mudará ao transportallo; outras a fórma, que somos obrigados a dar ao instrumento para facilitar o seu uso, impedirá que se possa applicar sobre o plano, em que se quer fazer a redução.

Ajuntemos a isto, que cada novo angulo *BAC*, que se toma deste modo, pede que se transporte de novo o instrumento sobre o papel; e que o unico meio, que ha para comparar dous angulos, he de os pôr hum sobre o outro, sem que deste modo se possa ter justamente nem a relação, que ha entre elles, nem as suas grandezas absolutas.

LII.

Era pois necessario que se pro-
cu-

curasse huma medida fixa para os angulos, como já a havia para os comprimentos. Ora esta medida, que era necessario haver, foi facil de achar. Porque Ab (Fig. 4.) ficando fixa, applica-se-lhe logo o lado Ac ; e fazendo gyrrar este lado á roda de A , he certo que encostando-se á extremidade c da regra movel Ac huma penna, ou hum lapis, que mostre sensivelmente o rasto do ponto c , este rasto, que formará hum arco de circulo, dará exactamente a medida do angulo para cada abertura particular dos lados Ab , Ac ; isto he, que por ser uniforme a curvidade do circulo, necessariamente succederá que a huma abertura dupla, tripla, quadrupla de cAb corresponderá hum arco duplo, triplo, quadruplo de cb .

Hum angulo tem por medida o arco do circulo, que em si comprehendem os seus lados.

LIII.

Suppondo pois que a circumferencia $bcdfg$, (Fig. 4.) descripta
i *pc-*

EST. V. pela revolução inteira do ponto c , esteja dividida em qualquer numero de partes iguaes, o numero de partes, de que o arco se compõe, e que estão postas entre as linhas $A c$, e $A b$, medirá exactamente a abertura destas linhas, ou o angulo $c A b$, que ellas formarem.

O circulo he dividido em 360 grãos, cada grão em 60 minutos, cada minuto em 60 segundos, &c.

Convieram os Geometras em dividir o circulo em 360 partes, a que chamáram grãos, cada grão em 60 minutos, cada minuto em 60 segundos, &c. Assim hum angulo $b A c$, por exemplo, terá 70 grãos, e 20 minutos, se o arco $b c$, que lhe servirá de medida, tiver 70 das 360 partes do circulo, e demais 20 das 60 partes de hum grão.

LIV.

O angulo recto tem 90 grãos, e os seus lados são perpendiculares hum ao outro.

Do que se segue, que hum angulo CAB (Fig. 5.) de 90 grãos, chamado communmente angulo recto, he aquelle, cujos lados AC , e AB comprehendem o quarto BC da cir-

circumferencia, os quaes são perpen- EST. V.
diculares hum ao outro.

LV.

Chama-se angulo agudo o angu- Hum angu-
lo mais pequeno do que hum angu- lo agudo he
lo recto, ou que tem menos de 90 mais peque-
grãos. Taes são os angulos CAB, no do que
(Fig. 6.) FAG, EAG. hum recto.

LVI.

Pelo contrario chama-se angulo Hum angu-
obtusó aquelle, que tem mais de 90 lo obtusó he
grãos, como FAB. maior do
que hum re-
cto.

LVII.

He evidente que todos os angu- A somma
los GAF, (Fig. 6.) FAE, EAC, dos angulos
CAB, que se podem fazer da mes- feitos da
ma parte sobre huma linha recta sobre huma
GB, e que tem o mesmo vertice A, mesma parte
tomando-os juntos, são iguaes a 180 sobre huma
grãos, ou a dous angulos rectos, linha recta,
medidos pela semicircumferencia. e que tem o
mesmo ver-
tice, vale
180 grãos.

EST. V.

LVIII.

Todos os angulos, que se podem fazer á roda de hum mesmo ponto, são, tomando-os a todos juntos, iguaes a quatro angulos rectos.

Da mesma sorte a somma de todos os angulos EAF, (Fig. 7.) FAB, BAC, CAD, DAE, que se podem fazer á roda do ponto A, que lhes serve de vertice commum, he igual a 360 grãos, ou a quatro angulos rectos, medidos pela circumferencia inteira BCDEF.

LIX.

Uso do instrumento chamado Semicirculo dimensorio, para tomar a grandeza de hum angulo.

Depois de termos visto que os angulos tem as partes do circulo por medida, vejamos como faremos para saber quantos grãos conterà hum angulo, que quizermos medir.

Servir-nos-hemos de hum instrumento I, (Fig. 8.) chamado Semicirculo dimensorio: este instrumento he composto de duas regras EAC, DAB, de igual comprimento, que se cruzão em A, e que tem humas pinulas nas suas extremidades. Humas destas regras EC, a que chamam ali-

alidada , he movel á roda de A; e EST. V.
 a outra DB he fixa , que serve de
 diametro ao semicirculo DCB divi-
 dido em 180 grãos , &c.

Ora querendo-se saber o angulo ,
 que formam duas linhas rectas , ti-
 radas do lugar , em que se estiver ,
 a dous objectos quaesquer F , G ,
 põe-se primeiramente a regra fixa
 DAB , de sorte que o olho posto em
 D veja hum dos dous objectos F ,
 pelas duas pinulas D , e B : depois ,
 sem mover o instrumento , se mova
 a alidada , até que o olho posto em
 E descubra o outro objecto G pelas
 pinulas E , e C ; e então a alidada
 notará sobre o semicirculo graduado
 o numero de grãos , minutos , &c.
 que contiver o angulo proposto GAF.

LX.

Querendo-se fazer sobre o papel hum angulo de hum numero deter-
 minado de grãos , nos serviremos de
 hum instrumento K (Fig. 9.) dividi-
 do

Uso do
 Transferidor
 para fazer
 hum angulo
 de hum nu-
 mero deter-

EST. V. do em 180 grãos, chamado Trans-
 minado de feridor; e pondo o centro A sobre
 partes. a ponta do angulo, que se quer tra-
 çar, e a linha AB sobre a linha AG,
 que se toma por hum dos lados do
 angulo, se marque o ponto C, que
 corresponde ao numero de grãos, que
 se quer dar ao angulo proposto; de-
 pois por este ponto, e pelo centro
 A, tirando a linha ACO, se terá o
 angulo OAG, que conterá o nume-
 ro de grãos pedido.

LXI.

EST. VI. Supponhamos agora que tendo-
 se tomado em hum papel a base FG,
 (Estampa VI. Fig. 1. e 2.) se quei-
 ra fazer sobre esta base hum trian-
 gulo FGH, semelhante ao triangu-
 lo ABC, tomado sobre hum terre-
 no. Para sabermos o que cada hum
 dos angulos CAB, CBA conterá de
 grãos, nos serviremos do semicircu-
 lo; depois por meio do transferidor
 se farão os angulos HFG, e HGF,
 ref-

respectivamente iguaes aos angulos EST. VI. CAB, e CBA ; e então porque o ponto H , no qual se unirão os lados FH , e GH , ficará necessariamente determinado por esta operação, como tambem o angulo FHG se terá o triangulo FGH , inteiramente semelhante ao triangulo ABC.

LXII.

Como importa muito que na prática , como dissemos, sejam os angulos exactamente medidos, não nos devemos contentar de os tomar, ainda com os instrumentos mais perfectos ; he tambem preciso achar o modo de verificar as suas medidas, para se fazer a correcção dellas, quando seja necessario. Ora este modo he simples, e facil. Tornemos ao triangulo ABC. Conhecemos que a grandeza do angulo C deve resultar da dos angulos A, e B ; porque augmentando-se, ou diminuindo-se estes angulos, a posição das linhas CA,
BC

EST. VI. BC se alteraria, e por consequencia tambem o angulo C, que estas linhas entre si fazem. Ora se o angulo C depende da grandeza dos angulos A, e B, deve-se presumir que o numero de grãos, que os angulos A, e B comprehendem, deve determinar o numero de grãos, que ha de conter o angulo C; e que assim poderá servir para verificar as operações, que se tiverem feito para determinar os angulos A, e B; pois que nos certificaremos de termos medido bem os angulos A, e B, se medindo depois o angulo C, se lhe achar o numero de grãos, que lhe pertencer relativamente á grandeza dos angulos A, e B.

Para se achar como da grandeza dos angulos A, e B se póde concluir a do angulo C, examinemos o que a este angulo succederia, se as linhas AC, BC se viessem a chegar, ou a apartar huma da outra. Supponhamos, por exemplo, que

BC,

BC, (Fig. 3.) movendo-se ao redor EST. VI. do ponto B, se aparta de AB para se avizinhar a BE, he evidente que em quanto BC se moveffe, o angulo B se abriria continuamente; e que ao contrario o angulo C se fecharia cada vez mais; do que logo se podia presumir, que neste caso a diminuição do angulo C igualaria a augmentação do angulo B; e que assim a somma dos tres angulos A, B, C seria sempre a mesma, qualquer que fosse a inclinação das linhas AC, BC sobre a linha AE.

LXIII.

Ora esta inducção presumida traz a sua demonstração consigo; porque tirando-se a recta ID (Fig. 4.) parallela a AC, primeiramente se verá que os angulos ACB, e CBD, chamados angulos alternos, serão iguaes, o que he evidente; pois que as linhas AC, e IB, sendo parallelas, serão inclinadas igualmente sobre

Angulos alternos são os angulos, que huma linha recta fórma de

bre

EST. VI. bre CBO ; e que assim o angulo IBO igualará o angulo ACB . Mas tambem o angulo IBO igualará o angulo CBD , porque a linha ID não será inclinada sobre CO mais de huma parte, do que da outra: logo o angulo DBC igual ao angulo IBO , igualará o angulo ACB seu alterno.

huma, e outra parte, cahindo sobre duas parallelas.

Estes angulos são iguaes.

LXIV.

Em segundo lugar se verá que o angulo CAE será igual ao angulo DBE , por causa das parallelas CA , e DB . Assim os tres angulos do triangulo se poderiam pôr ao pé huns dos outros, e unidos pelos seus vertices no ponto B , e então se veria que os tres angulos DBE , CBD , e CBA , que igualariam os tres angulos CAB , ACB , CBA , seriam iguaes a dous angulos rectos; (Artigo LVII.) e como tudo o que temos dito se poderá applicar do mesmo modo a qualquer triangulo que se-

seja , haverá a certeza desta proprie- EST. VI.
dade geral , que a somma dos tres A somma
angulos de hum triangulo he conf- dos tres an-
tantemente a mesma , e que ella he gulos de hũ
igual a dous rectos , ou , o que vem triangulo he
a ser o mesmo , a 180 grãos. igual a dous
angulos re-
ctos.

LXV.

Logo para se concluir o valor do terceiro angulo de hum triangulo , tendo-se medido dous , será preciso diminuir de 180 grãos o numero de grãos , que os dous angulos tomados juntos tiverem ; propriedade , que nos dá hum modo commo- diffimo de verificar a medida dos angulos de hum triangulo , da qual se verá huma infinidade de outras utilidades , segundo formos adiante. Aqui nos contentaremos de tirar as consequencias as mais immediatas.

LXVI.

Hum triangulo não póde ter mais do que hum angulo recto ; e com mais

EST. VI. mais forte razão não póde ter mais de hum angulo obtuso.

LXVII.

Se hum dos tres angulos de hum triangulo he recto, a somma dos outros dous he sempre igual a hum recto.

Estas duas proposições são tão claras, que não he preciso demonstrallas.

LXVIII.

Prolongando-se hum dos lados do triangulo ABC, (Fig. 4.) por exemplo, o lado AB, o angulo exterior CBE sómente, valerá tanto como os dous angulos interiores oppostos BCA, e CAB; porque se ao angulo CBA se ajuntarem os dous angulos BCA, e CAB, ou o angulo CBE, a somma será sempre igual a 180 grãos, ou a dous angulos rectos. (Artigo LXIV.)

O angulo exterior de hum triangulo vale os dous angulos interiores oppostos.

Sa-

LXIX.

Sabendo-se o valor de hum dos EST. VI. angulos de hum triangulo ifosceles ABC, (Fig. 5.) sabe-se o dos outros dous.

Tendo-se o angulo do vertice A, Hum angulo de hum triangulo ifosceles dá os outros dous. he evidente que diminuindo-se o numero de grãos, que este angulo con- tiver dos 180 grãos, que he a medida dos tres angulos do triangulo, a metade da somma que ficar, será a medida de cada hum dos angulos B, C, tomados sobre a base.

Se fosse hum dos dous angulos B, C, tomados sobre a base, que se tivesse reconhecido o dobro do seu valor diminuido de 180 grãos, daria o angulo do vertice A.

LXX.

Como hum triangulo equilatero Os angulos de hum triangulo equilatero são cada hum de 60 grãos. não he outra cousa senão hum triangulo ifosceles, ao qual cada hum dos seus

EST. VI. seus lados póde igualmente servir de base, claro está que os seus tres angulos são necessariamente iguaes, e que cada hum vale 60 gráos, terço de 180 gráos.

LXXI.

Descrição
do exagono.

Daqui se tira facilmente a descrição do exagono, ou polygono de seis lados, que tinhamos promettido. (Artigo XXIV.)

Porque para se achar huma linha, que reparta a circumferencia em seis partes iguaes, será preciso que esta linha seja a corda de hum arco de 60 gráos, sexta parte de 360 gráos, valor de toda a circumferencia. Suppondo pois que AB (Figur. 6.) seja esta corda, e do centro I, tirando para as extremidades A, e B, os radios AI, e IB, o angulo AIB valerá 60 gráos; e porque os dous lados AI, e IB serão iguaes, o triangulo AIB será isosceles. Logo
o an-

o angulo do centro, sendo de 60 EST. VI. grãos, cada hum dos outros dous angulos valerá tambem 60 grãos, metade de 120. Logo (Artigo LXX.) o triangulo AIB será equilatero. Logo AB igualará o radio do circulo. Do que se segue, que para descrever hum exagono, será preciso abrir o compasso com hum intervallo igual ao radio; e pondo-o seis vezes successivamente sobre a circumferencia, teremos os seis lados do exagono.

LXXII.

Descripto assim o exagono ABCDEF, facilmente se descreverá o dodecagono, ou polygono de doze lados.

Para o que divida-se o arco AKB, ou o angulo AIB, em duas partes iguaes; e AK, corda de metade do arco AKB, será hum dos lados do dodecagono.

A metade do angulo ao centro do exagono nos dá o angulo ao centro do dodecagono,

Pa-

EST. VI.

LXXIII.

Repartir hũ
angulo em
dous igual-
mente.

Para se repartir o arco AKB em dous arcos iguaes, AK , e KB , se fará a mesma operação, como se se quizesse cortar a corda AB em duas partes iguaes; isto he, que dos pontos A , e B , como centros, e com qualquer intervallo se descrevam os arcos MLN , OLP ; e do ponto L , secção dos dous arcos, se tire ao centro I a linha LI , a qual dividirá em dous o arco AKB , e a corda AB .

LXXIV.

Descripção
dos polygo-
nos de 24,
48, &c. la-
dos.

Seguindo-se o methodo preceden-
te, e repartindo-se o arco AK em
dous arcos iguaes, a corda de hum
destes dous arcos será o lado do po-
lygono de 24 lados. Da mesma for-
te se terão os polygonos de 48, 96,
192, &c. lados.

Ago-

Agora para descrever hum octogono, isto he, hum polygono de 8 lados, se principiará, traçando-se hum quadrado em hum circulo, o que se fará, se depois de se tirarem dous diametros AIB, (Fig. 7.) e CIE, que se cortem em angulos rectos, se ajuntarem as suas extremidades com as linhas AC, CB, BE, AE.

Descripção
do octogono.

Porque por causa da regularidade do circulo, e da igualdade dos quatro angulos, que formam as perpendiculares AIB, CIE, os quatro lados AC, CB, BE, EA serão necessariamente iguaes, e se acharão igualmente inclinados huns sobre os outros, o que não póde convir senão ao quadrado.

Descripto assim o quadrado, se dividirá pelo methodo precedente cada hum dos arcos CKB, BLE, &c. em duas partes iguaes, o que dará o octogono CKBLEMAN.

G

Re-

EST. VI.
E dos poly-
gonos de 16
32, &c. la-
dos.

Repartindo-se da mesma forte
cada hum dos arcos CK, KB, &c.
em 2, em 4, em 8, &c. partes
iguacs, se terão os polygonos de 16,
32, 64, &c. lados.

FIM DA PARTE PRIMEIRA.



ELE-

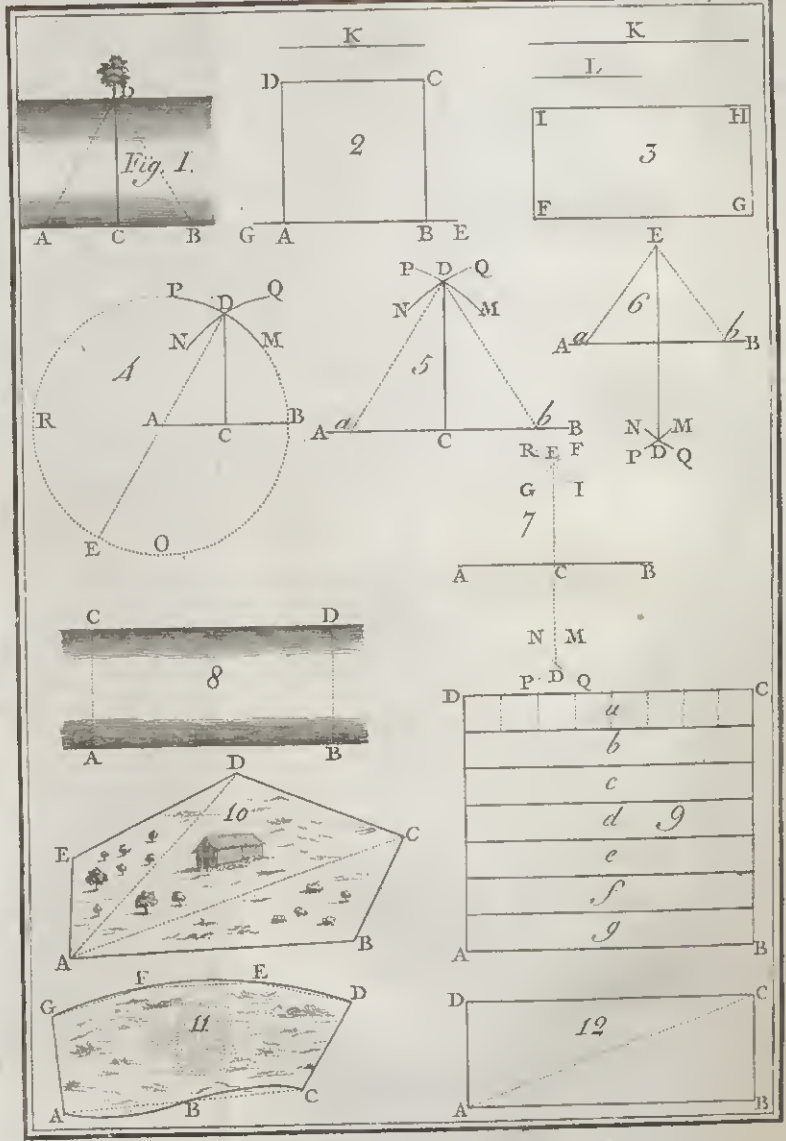
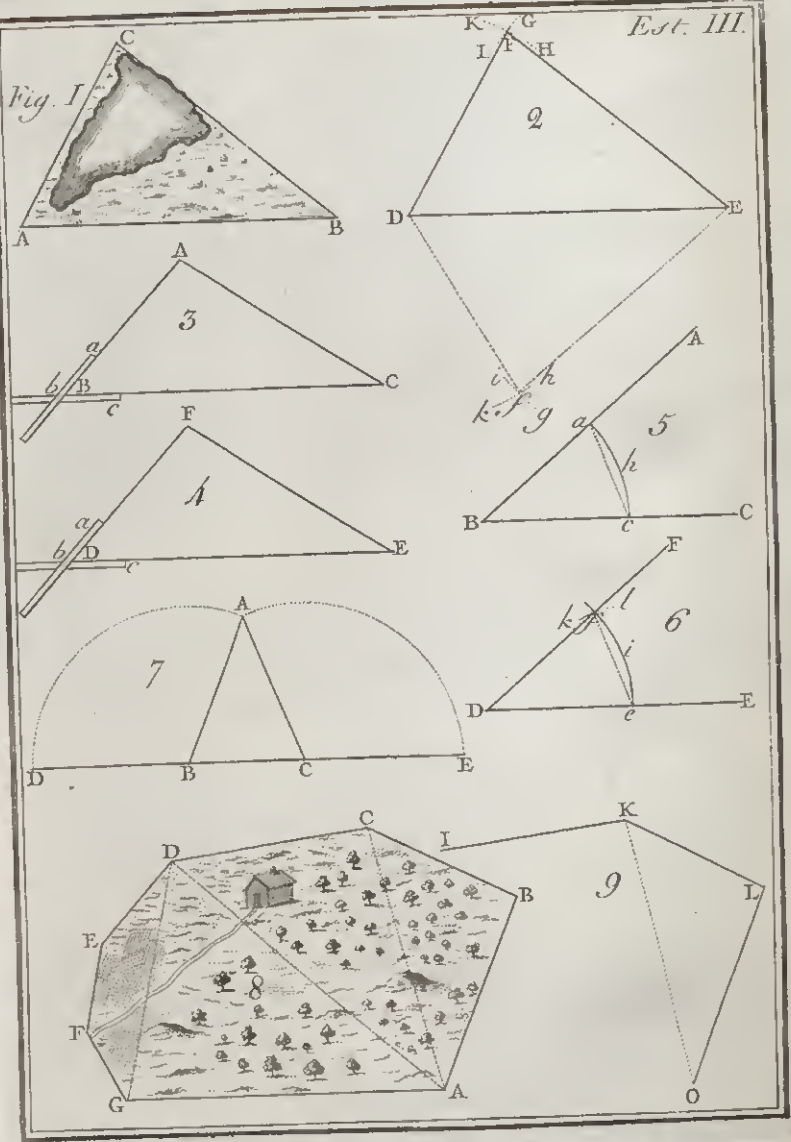


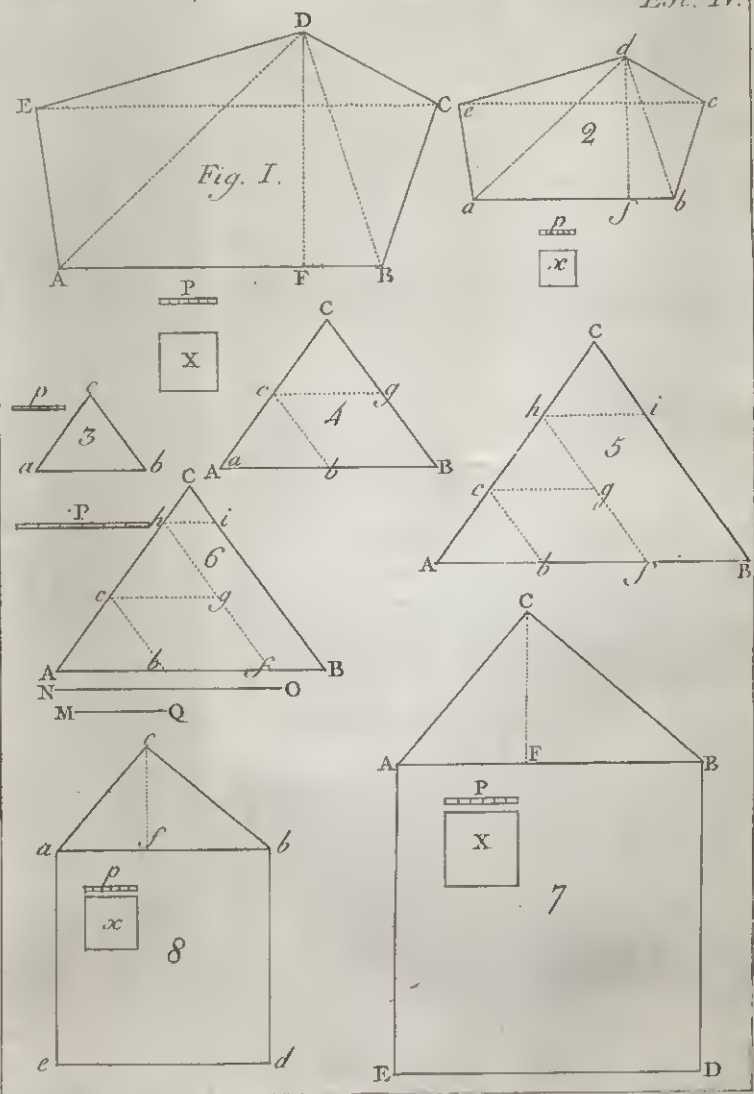




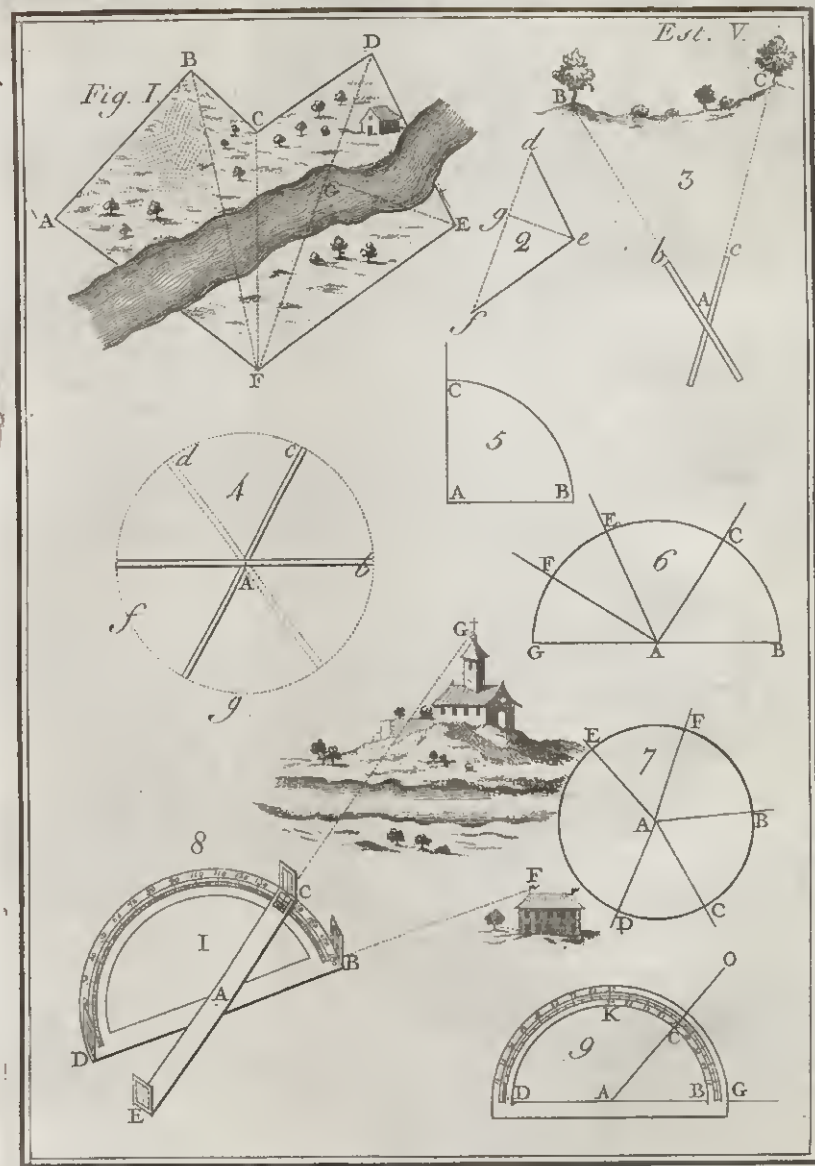
Fig. I



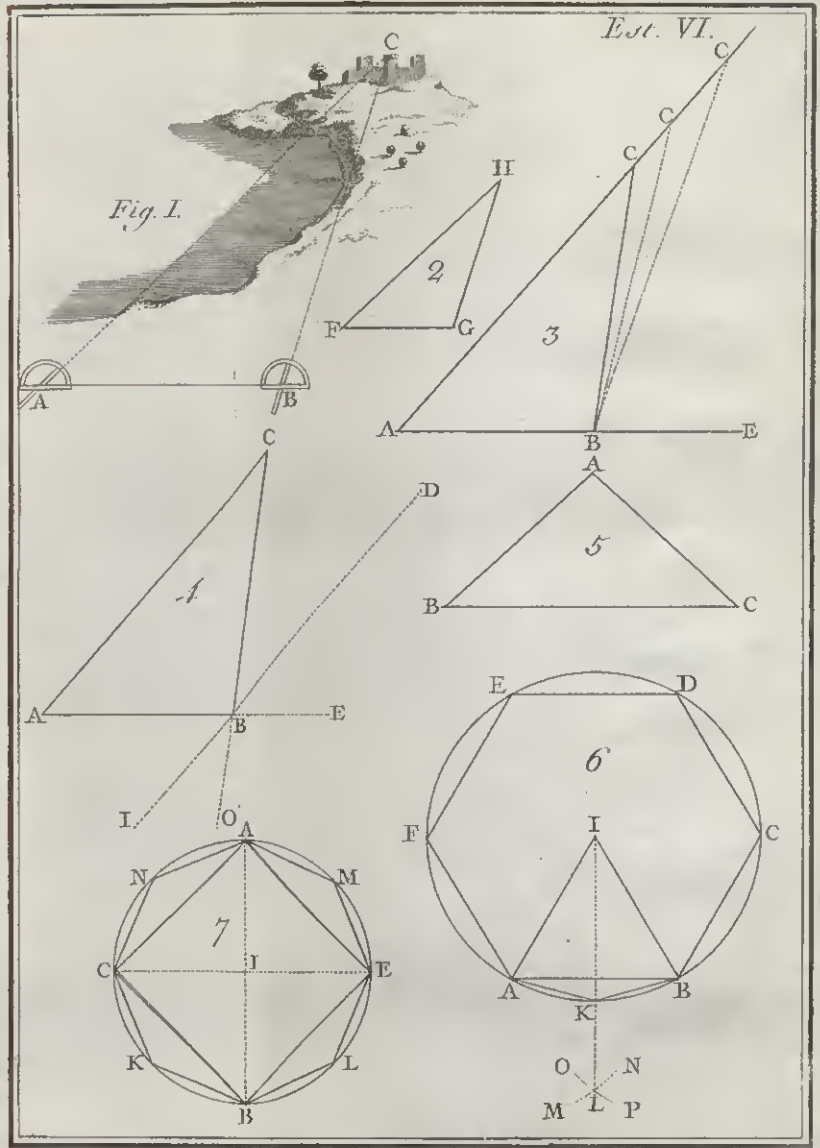
















ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PARTE SEGUNDA.

*Do Methodo Geometrico de comparar
as Figuras rectilneas.*



U E M reflectisse no que fica dito a respeito do modo, com que se chegou a poder medir os Terrenos, necessariamente devia reparar, que as posições das linhas, respeito humas ás outras, davam materia para fazer observações dignas por si mesmas de attenção, independentemente da uti-

lidade, que dellas podia resultar na prática: e he de presumir, que estas observações obrigáram os primeiros Geometras a passar a mais nos seus descobrimentos; porque não he sómente pela necessidade das cousas, que os homens se determinam a procurallas; muitas vezes a curiosidade he tambem outro grande motivo para os excitar a novos descobrimentos.

O que tambem contribuiria para os progressos da Geometria, he o gosto, que naturalmente se tem da sua exactidão rigorosa, sem a qual o espirito já mais se satisfaz.

Assim quando ao medir das figuras se vio que em huma infinidade de casos os petipés, e semicirculos não davam os valores das linhas, ou dos angulos, senão pouco mais, ou menos, se procuráram methodos, que supprissem ao defeito destes instrumentos.

Aqui tornaremos ás figuras rectilneas; porém nas operações, que fizer-

zer-

zermos para descobrir as suas justas proporções, não nos serviremos senão da regra, e compasso.

Succede muitas vezes que he necessario ajuntar em huma só figura várias outras, que lhe sejam semelhantes; ou desmembrar huma figura em outras da mesma especie; o que se póde fazer, operando logo pelos rectangulos, pois que todas as figuras rectilneas não são senão ajuntamentos de triangulos, e que cada triangulo he metade de hum rectangulo, que tem a mesma altura, e a mesma base.

I.

Para se compararem os rectangulos, he preciso saber reduzir qualquer rectangulo a outro, que tenha a mesma superficie; porém que tenha huma altura differente. Porque quando dous rectangulos se reduzirem a outros dous da mesma altura, elles não differirão mais que pelas

las suas bases; o maior será aquelle, que tiver a maior base, e elle conterá o mais pequeno, do mesmo modo que a sua base conterá a do mais pequeno rectangulo; o que ordinariamente se exprime assim: dous rectangulos, que tem a mesma altura, estão na mesma razão das suas bases.

Dous rectangulos, que tem a mesma altura, estão na mesma razão das suas bases.

II.

Para ajuntar estes dous rectangulos não será preciso mais do que pôr hum ao pé do outro.

III.

Nem mais difficil será o diminuir o menor do maior.

IV.

E para repartir hum rectangulo em hum numero determinado de rectangulos iguaes, será preciso repartir a sua base em hum semelhante numero de partes iguaes; depois le-

van-

vantar perpendiculares sobre os pontos de divisão.

V.

Agora proponha-se o reduzir o rectangulo ABCD (Estampa VII. Fig. 1.) em outro BFEG, que tenha a mesma superficie, e que seja a sua altura BF, notar-se-ha que pois que o seu valor será o producto da sua altura pela sua base, será preciso que o rectangulo procurado BFEG, cuja altura será maior que BC, tenha a sua base mais pequena que AB; isto he, que se BF, por exemplo, he duplo de BC, será preciso que BG não seja senão metade de AB.

Se BF fosse triplo de BC, BG não seria senão o terço de AB.

Da mesma sorte se verá que se BF, em lugar de conter BC hum numero certo de vezes, o contivesse com fracção, como duas vezes, e hum terço, o rectangulo BFEG não poderia ser igual ao rectangulo ABCD,

EST. VII.
Maneira de
reduzir hum
rectangulo
em outro,
que tenha
huma altura
dada.

EST. VII. CD, sem que a sua base BG fosse tambem comprehendida duas vezes, e hum terço na base AB. E em geral, será facil de ver que a fim de que dous rectangulos ABCD, BFEG sejam iguaes, será necessario que a base BG de hum seja comprehendida na base AB do outro, como a altura BC na altura BF.

Logo não será preciso mais do que dividir a linha AB, de sorte que AB seja para BG, como BF para BC; o que se fará, (Parte I. Artigo XLI.) tirando a linha FA, e do ponto dado C a parallela CG.

VI.

Segunda maneira de reduzir hum rectangulo em outro, cuja altura seja dada.

Para se reduzir o rectangulo ABCD (Fig. 2.) em outro rectangulo BFEG, que tenha huma altura dada FB, póde-se usar de huma maneira menos natural do que a precedente, porém mais cómoda. Tendo-se prolongado AD até que ella encontre em I a recta FEI, tirada

pe-

pelo ponto F, parallelamente a AB, EST. VII.
 se tirará a diagonal BI; e pelo pon-
 to O, onde ella encontrará o lado
 DC, se tirará GOE parallelamente a FB,
 e o rectângulo BFEG será igual ao
 rectângulo ABCD.

Para o provar bastará que de-
 monstremos, que tirando-se dos re-
 ctângulos ABCD, BFEG a parte
 commua OCBG, o rectângulo AD-
 OG igualará o rectângulo EOCF.

Ora reflectindo-se na igualdade
 dos dous triangulos IBF, IBA, se
 verá que diminuindo-se destes trian-
 gulos quantidades iguaes, os restos
 serão iguaes. Mas o triangulo IAB
 se mudará no rectângulo ADOG,
 diminuindo-se-lhe os dous triangulos
 IDO, OGB; como tambem o trian-
 gulo IBF virá a ser o rectângulo
 EOCF, pela diminuição dos dous
 triangulos IEO, OBC, iguaes aos
 dous primeiros. Logo os dous re-
 ctângulos ADOG, EOCF, restos
 dos dous triangulos, serão entre si
 iguaes,

EST. VII. iguaes, como tambem os rectangulos ABCD, BFEG.

VII.

Demonstra-se rigorosamente, que se dous rectangulos são iguaes, a base do primeiro he para a base do segundo, como a altura do segundo para a altura do primeiro.

Esta segunda maneira de mudar hum rectangulo em outro confirma o principio, que pela primeira se suppõe, o qual poderia parecer não ser fundado, senão em huma simples inducção.

Da igualdade dos dous rectangulos ABCD, BFEG se tinha concluido que era necessario que AB fosse para BG, como BF para BC; o que agora se póde provar pelo Artigo preccedente.

Porque os triangulos IAB, e OGB, sendo manifestamente semelhantes, a base AB do grande será para a base GB do pequeno, como altura IA para a altura OG, ou como BF para BC suas iguaes. Logo AB será para BG, como BF para BC, conforme ao principio do Artigo V.

Do

VIII.

Do mesmo modo de que usámos **EST. VII.** para demonstrar, que da igualdade dos rectangulos ABCD, BFEG se seguia que a altura BF era para a altura BC, como a base AB para a base BG, se demonstraria tambem, que quando quatro linhas BF, BC, AB, BG forem taes, que a primeira seja para a segunda, como a terceira para a quarta, o rectangulo, que tivesse por altura, e por base a primeira, e a quarta destas linhas, seria igual ao rectangulo, que tivesse por altura, e por base a segunda, e a terceira.

Se quatro linhas forem taes, que a primeira seja para a segunda, como a terceira para a quarta, o rectangulo formado pela primeira, e pela quarta será igual ao que se formar pela segunda, e pela terceira.

IX.

Quando quatro quantidades, assim como as linhas precedentes BF, BC, AB, BG, são taes, que a primeira he para a segunda, como a terceira para a quarta, se diz que estas quatro quantidades estam em
pro-

Quatro quantidades, das quaes a primeira he para a segunda, como a terceira para a quarta, se diz que es-

EST. VII.
tão em pro-
porção, ou
que formam
hum pro-
porção.

proporção, ou que ellas formam hu-
ma proporção, porque 6 he com-
prehendido em 9, da mesma forte
que 18 he incluído em 27. O mes-
mo he de 15, 25, 75, 125, &c.

X.

Dos quatro
termos de
hum pro-
porção, o
primeiro, e
o quarto se
chamam ter-
mos extre-
mos, e me-
dios o segun-
do, e o ter-
ceiro.

A primeira, e a quarta das qua-
tro quantidades de hum proporção
se chamam termos extremos, ou sim-
plesmente extremos; a segunda, e a
terceira se chamam termos medios,
ou simplesmente medios.

Servindo-nos das definições pre-
cedentes, he evidente que as propo-
sições comprehendidas nos Artigos
VII, e VIII se exprimirão deste mo-
do.

XI.

Em hum
proporção,
o producto
dos extre-
mos he igual
ao producto
dos medios.

Quando quatro quantidades es-
tam em proporção, o producto das
extremas he igual ao producto das
medias.

Se

XII.

Se quatro quantidades forem taes, que o producto das extremas seja igual ao producto das medias, estas quatro quantidades estarão em proporção.

Se o producto dos extremos he igual ao producto dos medias, os quatro termos formam huma proporção.

XIII.

He necessario reflectir muito nos dous Artigos precedentes, porque são de grande uso: daqui se deduz entre outras cousas a demonstração da Regra, que se chama na Arithmetica a Regra de tres. Para darmos huma idéa desta regra, usamos de hum exemplo, pois he a mais simples maneira de nos explicarmos.

Disto se tira a Regra de tres.

Supponhamos que 24 jornaleiros fizeram 30 braças de obra em hum certo tempo, pergunta-se: Quanta farão 64 jornaleiros em igual tempo?

He evidente que para resolver a quest-

EST. VII. questão, he preciso achar hum numero, que seja para 64, na mesma razão de 30 para 24. Ora, segundo o que temos visto, este numero será tal, que o seu producto por 24 igualará o producto de 30 por 64. Mas se o producto de 30 por 64 he 1920, logo o numero procurado será aquelle, que sendo multiplicado por 24, dará 1920.

Ora por pouca luz, que se tenha das operações da Arithmetica, facilmente se percebe que este numero deve ser o quociente da divisão de 1920 por 24, isto he 80.

Ou a maneira de achar o quarto termo de huma proporção, da qual se dem os tres primeiros.

Em geral, para se achar o quarto termo de huma proporção, da qual forem dados os tres primeiros, será necessario tomar o producto do segundo, e do terceiro, e repartir este producto pelo primeiro termo da proporção.

XIV.

Hum exemplo tão simples, como
o que

o que escolhemos , talvez não faça EST. VII. bastante-mente conhecer a necessidade do Methodo precedente. A boa razão sómente faria achar o numero pedido. Bem se vê que 30 excede hum quarto a 24, e que por isso he necessario que o numero procurado exceda hum quarto a 64, o que nos dá 80. Porém ha casos , nos quaes se poderia gastar muito tempo a procurar a relação dos dous primeiros numeros da proporção.

Por exemplo , quer-se o quarto termo proporcional aos tres numeros 259, 407, 483.

Para este se achar pelo methodo precedente, he necessario multiplicar 483 por 407, e repartir 196581, que he o seu producto, por 259, o que nos dá 759 para o quarto termo procurado.

Se de outra sorte se procurasse este termo, talvez que por tentativas se achasse. Bem se poderia descobrir, por exemplo, que 148, ex-
ces-

EST. VII. cesso de 407 sobre 259, contém quatro setimas partes de 259; que assim era tambem preciso ajuntar a 483 o numero 276, que contém quatro das suas setimas partes; porém a generalidade, e segurança do Methodo precedente nos livra sempre do embaraço das tentativas, que até seriam inuteis em muitos casos.

XV.

Quando houverem dous quadrados para ajuntar, a sua addição se fará da mesma maneira da dos dous rectangulos, pois que os quadrados são rectangulos, cujas alturas, e bases são iguaes. Reduzir-se-ha pois hum dos quadrados, o mais pequeno por exemplo, em hum rectangulo, que tenha o lado do grande por altura, e os dous quadrados não farão mais do que hum rectangulo. Da mesma forte se poderia dar a altura do quadrado pequeno a ambos, ou qualquer outra á vontade; mas
o que

o que absolutamente não podíamos EST. VII. deixar de nos propôr, quando se quizesse reduzir dous quadrados a huma só figura, era o fazer hum quadrado igual a outros dous. Problema este, de que era facil achar a solução seguinte.

XVI.

Supponhamos que os dous quadrados $ABCD$, (Fig. 3.) $CBFE$, dos quaes se quer fazer hum só quadrado, sejam iguaes entre si; he facil de perceber, que tirando-se as diagonaes AC , e CF , os triangulos ABC , e CBF farão ambos o valor de hum quadrado. Logo transportando para baixo de AF os outros dous triangulos DCA , e CEF , se fará o quadrado $ACFG$, o lado do qual AC será a diagonal do quadrado $ABCD$, e a sua superficie igualará a dos dous quadrados propostos, o que não precisa de demonstração.

Fazer hum quadrado duplo de outro.

H

Sup.

EST. VII.

XVII.

Fazer hum
quadrado
igual a ou-
tros dous
desiguaes.

Supponhamos agora que se queira fazer hum quadrado igual á somma de dous quadrados desiguaes, como $ADCd$, (Fig. 4.) $CFEf$; ou, que vem a ser o mesmo, que se queira reduzir a figura $ADFEfd$ em hum quadrado.

Seguindo a idéa do methodo precedente, se procurará se he possível achar na linha DF algum ponto H , tal,

1.º Que tirando as linhas AH , e HE , e fazendo-se mover os triangulos ADH , EFH á roda dos pontos A , e E , até que elles tomem as posições $A dh$, $E fh$, se ajuntem estes dous triangulos em h .

2.º Que os quatro lados AH , HE , Eh , hA sejam iguaes, e perpendiculares huns aos outros.

Ora este ponto H se achará, fazendo DH igual ao lado CF , ou EF ; porque da igualdade supposta
en-

entre DH , e CF , primeiramente se segue, que fazendo-se gyrar ADH á roda do seu angulo A , de sorte que se lhe dê a posição $A dh$, o ponto H chegando a h , estará distante do ponto C de hum intervallo igual a DF . EST. VII.

Da mesma igualdade supposta entre DH , e CF se segue tambem, que HF igualará DC ; e que assim o triangulo EFH , gyrando á roda de E para tomar a posição Efh , o ponto H chegará ao mesmo ponto h , distante de C , de hum intervallo igual a DF .

Logo a figura $ADFE df$ ficará reduzida a huma figura de quatro lados $AHEh$. Não falta mais senão vermos se os quatro lados serão iguaes, e perpendiculares huns aos outros.

Ora a igualdade destes quatro lados he evidente, pois que Ah , e hE são os mesmos que são AH , e HE ; e a igualdade destes dous ul-

EST. VII. timos se tirará de que DH , sendo igual a CF , ou a FE , os dous triangulos ADH , HEF serão iguaes, e semelhantes.

Não nos resta senão ver se os lados das figuras AHE *b* formarão angulos rectos; do que facilmente nos certificaremos, notando, que em quanto HAD voltar á roda de A para chegar a hAd , será preciso que o lado AH faça o mesmo movimento, que faz o lado AD . Ora o lado AD fará hum angulo recto DA *d*, mudando-se em A *d*. Logo o lado AH fará tambem hum angulo recto HA *h*, vindo a ser A *h*.

Quanto aos outros angulos H , E , *h*, he bem visível que elles serão necessariamente rectos; porque não será possível que huma figura terminada por quatro lados iguaes tivesse hum angulo recto, sem que os outros fossem igualmente rectos.

XVIII.

Se se observar que os dous qua- **EST. VII:**
 drados $ADC d$, $CFE f$ são feitos,
 hum sobre AD , lado medio do trian-
 gulo ADH , e o outro sobre EF ,
 igual a DH , lado menor do mesmo
 triangulo ADH ; e que o quadrado
 $AHE h$, igual aos outros dous, he
 descripto sobre o lado maior AH ,
 que ordinariamente se chama a hy-
 pothenusa do triangulo rectangulo,
 se descobrirá esta famosa propriedade
 dos triangulos rectangulos, que o
 quadrado da hypotenusa he igual
 á somma dos quadrados construidos
 sobre os outros dous lados.

A hypothe-
 nusa de hum
 triangulo re-
 ctangulo, he
 o seu lado
 maior: e o
 quadrado
 feito por es-
 te lado, he
 igual á som-
 ma dos qua-
 drados fei-
 tos pelos ou-
 tros dous la-
 dos.

XIX.

Logo quando de dous quadrados
 $HDKL$, (Fig. 5. e 6.) $ABCD$ se
 quizer fazer hum sómente, será des-
 necessario de os pôr hum ao pé do
 outro para os reduzir a hum só, co-
 mo se fez no Artigo XVII. Bastará
 pôr

De donde se
 tira hum
 modo sim-
 ples de redu-
 zir dous qua-
 drados a hum
 sómente.

EST. VII. pôr os seus lados AD , DH , (Fig. 7.) de forte que elles façam hum angulo recto, e tirar depois a linha AH , porque então esta linha será o lado do quadrado procurado $AHIE$.

XX.

Se os lados de hum triangulo rectangulo servirem de bases a tres figuras semelhantes, a figura, que se fizer sobre a hypethenufa, será igual ás outras duas.

Se houvesse duas figuras semelhantes $DAFGM$, (Fig. 8. e 9.) $DH-PON$, e que se propuzesse de fazer dellas a terceira igual em superficie ás duas juntas, bastaria pôr as bases AD , HD destas duas figuras sobre os dous lados de hum angulo recto ADH , (Fig. 10.) e a hypethenufa AH do triangulo ADH seria a base da figura pedida.

Para darmos a razão disto, considerem-se os quadrados $ABCD$, $DH-KL$, $AHIE$ feitos pelas bases das tres figuras semelhantes, e logo se verá pelo Artigo XVIII. que o quadrado $AHIE$ sómente valerá pelos outros dous quadrados $ABCD$, $DH-$

DHKL. Ora as figuras semelhantes EST. VII. são entre si como os quadrados dos seus lados homologos. (Parte I. Art. XLVII.) Logo os quadrados ABCD, DHKL, AHIE se acham ser as mesmas partes das figuras DAFGM, DHPON, AHQRS.

Do que se segue que a figura AHQRS valerá tanto, como as outras duas. Supponhamos, por exemplo, que cada hum destes quadrados fosse a metade da figura, em que elle fosse comprehendido, ninguem duvidaria que a figura AHQRS não fosse igual ás outras duas, pois que a sua metade valeria tanto, como as metades das duas figuras DHPON, DAFGM. Da mesma sorte seria, se os quadrados ABCD, DHKL, AHIE fossem terços, quartos, &c. das figuras DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

Se se propuzesse o ajuntar tres, quatro, &c. figuras semelhantes; ou, Reduzir varias figuras semelhantes
que

EST. VII. que vem a ser o mesmo, tres, qua-
 a huma só- tro, &c. quadrados, o methodo fe-
 mente. ria sempre o mesmo. Querendo, por
 exemplo, ajuntar tres, far-se-hia pri-
 meiramente hum quadrado igual aos
 dous primeiros; depois a este novo
 quadrado se lhe ajuntaria o tercci-
 ro, e assim se teria hum quadrado
 igual aos tres quadrados propostos.

XXII.

Do que se segue, que propon-
 do-se de fazer hum quadrado, que
 seja cinco, seis, &c. vezes maior do
 que outro, bastaria seguir o metho-
 do precedente para resolver este Pro-
 blema, e ainda ás avéssas, isto he,
 para fazer hum quadrado, que fos-
 se sómente a quinta, sexta, &c. par-
 te de hum quadrado proposto; o que
 simplesmente demandaria o lembrar-
 se do modo de achar a quarta pro-
 porcional a tres linhas dadas; po-
 rém na terccira Parte desta Obra da-
 remos hum methodo mais directo,
 e mais

e mais commodo para resolver esta EST. VII. forte de Problemas.

XXIII.

A addição das figuras semelhantes serve para huma prova decisiva da necessidade de se abandonarem os petipés, quando se querem fazer as operações de hum modo, que se possa demonstrar rigorosamente.

Supponhamos, por exemplo, que se tivesse para fazer hum quadrado duplo de outro; aquelles, que não soubessem o methodo dado no Artigo XVI. se haveriam nisto verisimilmente da maneira seguinte.

Dividiriam o lado do quadrado, que lhes dessem em hum grande numero de partes, em 100 partes por exemplo; depois multiplicando 100 por 100, achariam 10000 para o valor do quadrado, o que daria 20000 para o do quadrado pedido.

Porém do valor deste não tirariam o modo de o descrever; seria preciso que tivessem o seu lado

EST. VII. exprimido por hum numero, e que este numero fosse tal, que multiplicado por si mesmo, isto he, quadrando-o, o producto dêsse 20000.

O producto, que resulta da multiplicação de hũ numero por si mesmo, he o quadrado deste numero.

Ora este numero, de que elles precisavam, em vão o procurariam em hum petipé, cujas partes fossem centesimas do lado do primeiro quadrado; porque 141 multiplicado por si mesmo, daria 19881; e 142 daria 20164; o que se apartaria de huma, e outra parte do numero, que elles deviam achar.

Talvez cuidariam que repartindo o lado do quadrado proposto em mais de 100 partes, achariam hum numero determinado destas partes para o lado do quadrado duplo do primeiro; mas por mais provas que fizessem, sempre achariam que em vão procuravam dous numeros, hum dos quaes exprimisse o lado; ou, seguindo a linguagem ordinaria, a raiz de hum quadrado, e o outro o lado, ou a raiz do quadrado duplo.

A raiz de hum quadrado he o numero, que multiplicado por si mesmo, dá o quadrado.

Com

XXIV.

EST. VII.

Com effeito na Arithmetica se demonstra que se dous numeros não são multiplices hum do outro, isto he, se hum não contém o outro hum numero certo de vezes, o quadrado do maior nem por isso será multiplice do quadrado do mais pequeno. Assim 5, por exemplo, não se podendo repartir exactamente por 4, o seu quadrado 25 tambem se não poderá repartir por 16 quadrado de 4.

Hum numero he multiplice de outro, quando elle o contém varias vezes exactamente.

Assim quadrando-se dous numeros, hum dos quacs seja maior do que o outro; e que não obstante seja menor do dobro delle, fahiráõ por esta operação outros dous numeros, hum dos quacs será menor do que o quadruplo do outro; porém sem que possa ser duplo, nem triplo. Logo ainda que se divida o lado de hum quadrado em tal numero de partes que se quizer, o lado do quadrado duplo, que, segundo o que se

EST. VII. se demonstrou no Artigo XVI, será a diagonal deste quadrado, não conterá hum numero exacto destas mesmas partes; o que na linguagem dos Geometras se exprimiria, dizendo, que o lado do quadrado, e a sua diagonal são incommensuraveis.

O lado de hum quadrado, e a sua diagonal são incommensuraveis.

Outras linhas incommensuraveis.

XXV.

Tambem se póde notar que ha muitas outras linhas, que não tem alguma medida commua.

Porque escrevendo-se as duas series
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.
 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.
 a primeira das quaes exprime os numeros naturaes, e a outra os seus quadrados, se verá que assim como os numeros, que estiverem entre 4, e 9, entre 9, e 16, entre 16, e 25, &c. não terão alguma raiz, assim tambem os lados de dous quadrados, hum dos quaes seja triplo, ou quintuplo, ou sextuplo, &c. do outro, serão entre si incommensuraveis.

De

XXVI.

De serem varias linhas incom-^{EST. VII.} mensuraveis com outras, poderia nascer alguma suspeita sobre a exactidão das proposições, que nos servirão para provar a proporcionalidade das figuras semelhantes. Já se vio que ao comparar estas figuras (Parte I. Artigo XXXIV, e scgg.) sempre supuzemos que ellas tinham hum pe- tipé, que igualmente podia servir para se medirem todas as suas partes, cuja supposição parece que agora se devia limitar por conta do que assima dissemos. He preciso pois que tornemos atrás, e que examinemos se as nossas proposições, para serem certas, necessitam por si mesmas de algumas modificações.

XXVII.

Tornemos ao que se disse no Artigo XXXIX. da primeira Parte, e vejamos se he exactamente verdade que

EST. VII. que os triangulos taes como abc (Fig. 11. e 12.) ABC , cujos angulos são os mesmos, tenham os seus lados proporcionaes. Supponhamos, por exemplo, que a base do primeiro seja ab , e a do segundo huma recta AB , igual á diagonal de hum quadrado, que tenha por lado ab , e nesta supposição investiguemos se a proporção de AC para ac será como a de AB para ab .

Ainda que, segundo o que temos visto, por maior que fosse o numero de partes, que arbitrariamente se suppuzessem em ab , AB , já mais poderia comprehender hum numero certo destas partes; he não obstante facil de perceber, que quanto este numero for maior, mais AB se approximará a ser medido exactamente pelas partes de ab . Supponhamos ab dividido em 100 partes; o que AB comprehenderá destas partes, se achará entre 141, e 142. (Artigo XXIII.) Contentemo-

nos

nos das 141, e deixemos o pequeno resto. Claro está (Parte I. Artigo XXXIX.) que AC conterà também 141 das partes de ac . EST. VII.

Supponhamos depois ab reparado em 1000 partes, o que AB conterà das partes de ab , será entre 1414, e 1415: tomemos sómente as 1414, e deixemos também o resto; achar-se-ha da mesma sorte que AC conterà 1414 das millesimas partes de ac ; e que em geral AC conterà sempre tantas partes de ac com hum resto, como AB conterà das partes de ab com hum resto.

Demais, estes restos, como temos observado, serão de huma, e outra parte tanto mais pequenos, quanto o numero das partes de ab for maior. Logo será permittido de os abandonar, imaginando-se a divisão de ab levada até o infinito; e poder-se-ha então dizer, que o numero de partes de ac , que AC comprehender, igualará o numero de par-

EST. VII. partes de ab , que AB contiver; e que assim AC será para ac , como AB para ab .

Os triângulos, e as figuras semelhantes tem os seus lados proporcionaes, ainda quando estes lados são incommensuraveis.

Temos pois rigorosamente demonstrado, que quando dous triângulos tem os mesmos angulos, elles tem os seus lados proporcionaes, seja que os seus lados tenham huma medida commua, ou que a não tenham.

A proposição (Part. I. Art. XLV.) donde se tira a proporcionalidade das linhas, que correspondem humas ás outras nas figuras semelhantes, da mesma sorte se justificaria.

XXVIII.

Com razões semelhantes se verá, que as proposições explicadas nos Artigos XLIV, e XLVII. da primeira Parte, onde se demonstrou que as áreas dos triângulos, e das figuras semelhantes tem entre si a mesma proporção, que tem os quadrados dos seus lados homologos, são

E estas figuras são sempre entre si, como os quadrados

são sempre em geral verdadeiras, ainda quando os lados destas figuras são incommensuraveis. EST. VII. dos seus lados homólogos.

Tomemos por exemplo os triangulos semelhantes ABC , abc , dos quaes supporemos as alturas incommensuraveis com as suas bases; neste caso não haverá quadrado algum, por pequeno que seja, que possa servir de medida commua a estes triangulos, e aos quadrados feitos sobre as suas bases; isto he, as áreas abc , e $abde$ serão entre si incommensuraveis; como tambem as áreas ABC , e $ABDE$; porém não será menos certo, que o triangulo ABC será para o quadrado $ABDE$, como o triangulo abc para o quadrado $abde$.

Do que nos certificaremos, observando que quanto mais se suppuzerem ser pequenas as partes do pe-
tipé, de que nos servirmos para medir AB , e CK , tanto mais nos aproximaremos a ter os números; que

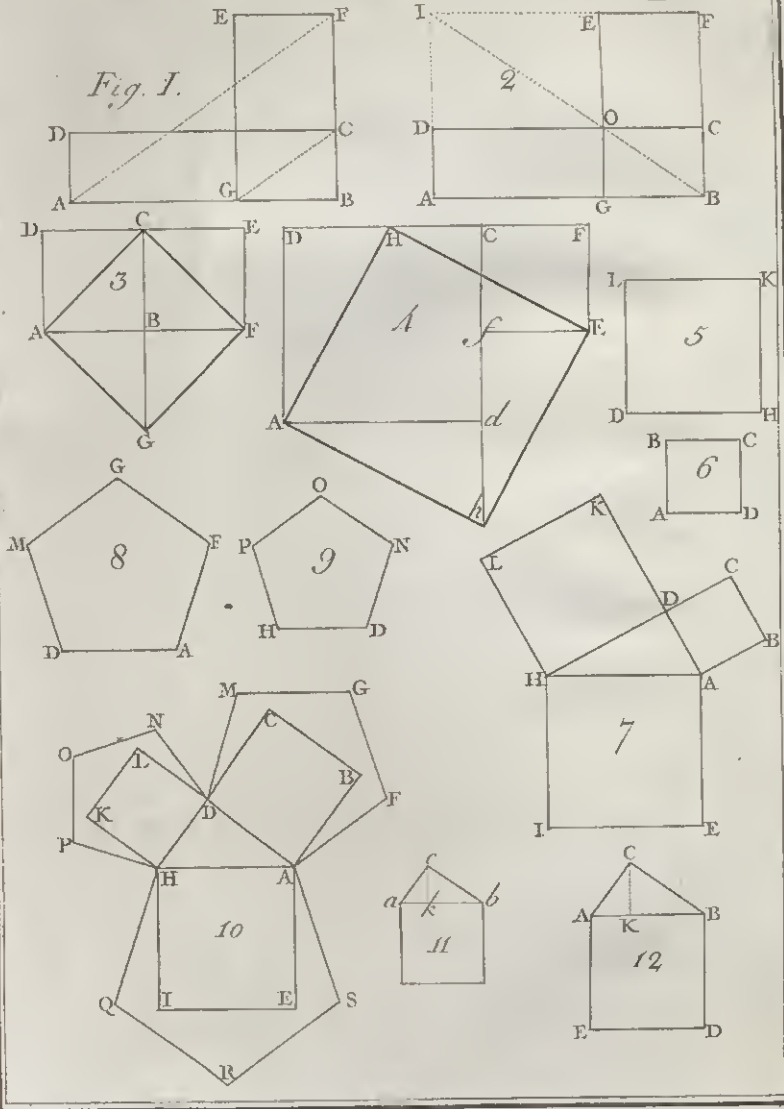
EST. VII. exprimirão a proporção de ABC para $ABDE$. Logo dividindo sempre o petipé do triangulo abc no mesmo numero de partes, e abandonando os restos, se verá que os mesmos numeros servirão sempre para exprimir a razão do triangulo ABC para o quadrado $ABDE$, e a do triangulo abc para o quadrado $abde$. Imaginemos que a divisão dos petipés seja infinita, e ver-se-ha que os restos virão a ser absolutamente nada; e poder-se-ha dizer, que os numeros, que exprimirem a razão do triangulo abc para o quadrado $abde$, exprimirão tambem a razão do triangulo ABC para o quadrado $ABDE$; e que da mesma sorte o triangulo abc será para o quadrado $abde$, como o triangulo ABC para o quadrado $ABDE$.

O mesmo será de todas as mais figuras semelhantes.

FIM DA PARTE SEGUNDA.

ELE-

Fig. 1.







ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PARTE TERCEIRA.

*Da medição das Figuras circulares,
e das suas propriedades.*

DEPOIS de se ter chegado a medir toda a sorte de figuras rectilneas, se quiz tambem ter o modo de determinar aquellas, que se limitam em linhas curvas. Os terrenos, e em geral os espaços, que se intentam medir, não são sempre terminados por linhas rectas.

Muitas vezes as figuras curvilineas, e as figuras mixtilineas, isto he, aquellas, que são terminadas por linhas rectas, e por linhas curvas, se podem reduzir a figuras inteiramente rectilineas, como já dissemos; porque havendo para se medir huma figura tal, como ABCDEFG, (Estampa VIII. Fig. 1.) se poderia tomar o lado AD por hum ajuntamento de duas, tres, &c. linhas rectas; e substituindo depois a recta FD á curva FDE, se teria a figura rectilinea ABCDEFG, a qual differiria tão pouco da figura mixtilinea, que se poderia tomar huma por outra sem erro sensivel.

Operar-se-hia pois sobre estas figuras, segundo os methodos precedentes. Mas os Geometras de nenhuma maneira se accomodariam com esta sorte de operações: elles querem sómente as que são rigorosas. Demais, ha taes casos, em que a transformação de huma figura curvilinea

vi-

vilinea, ou mixtilinea, em huma figura inteiramente rectilinea, demandaria que se repartisse o seu contorno em tão grande numero de partes, que então o methodo commum sería impraticavel; e ninguem se tentaria a seguillo, tendo para medir hum espaço tal como Z, (Fig. 7.) ou o circulo inteiro X; (Fig. 3.) sería preciso seguir outro methodo para se achar a medida de taes espaços. Aqui sómente trataremos daquelles, que tem os seus contornos terminados por arcos de circulo.

I.

Supponhamos que haja para medir a área do circulo X. (Fig. 3.) Observe-se, que inscrevendo-se-lhe hum polygono regular ABCDE, &c. quantos mais lados este polygono tiver, mais se approximarà a ser igual ao circulo. Ora temos visto que a área desta figura (Parte I. Art. XXII.) he igual a tantas vezes o pro-
du-

EST. VIII. ducto do lado BC por a metade do apothêma AH, como o polygono tem de lados; ou, que he o mesmo, que esta área tem por medida o producto do contorno inteiro BCDE, &c. por metade do apothêma. Logo, pois que levando até o infinito o numero dos lados do polygono, a sua área, o seu contorno, o seu apothêma igualará a área, o contorno, e o radio do circulo; a medida do circulo será o producto da sua circumferencia por a metade do seu radio.

A medida do circulo he o producto di sua circumferência por metade do seu radio.

II.

A área do circulo he igual a hum triangulo, que tem por altura o radio, e por base huma recta igual á circumferência.

Do que se segue, que a superficie de hum circulo BCD (Fig. 4.) he igual á de hum triangulo ABL, a altura do qual sería o radio AB, e a base huma recta BL igual á circumferencia.

III.

Não se trata pois senão de ter
o ra-

o radio, e a circumferencia. A ref- EST. VIII.
peito do radio, este he facil de medir; porém não he o mesmo da circumferencia: não obstante para se ter a sua medida, póde-se envolver o circulo com hum fio, o que em muitas occasiões he sufficiente para a prática.

Porque até agora não se pode chegar a medir geometricamente a circumferencia do circulo, isto he, a determinar a razão, que ella tem com o seu radio. Acha-se esta razão perto de centenas de milhares de milhares, e até se lhe approxima quanto se quer, sem que ella com isto se possa determinar rigorosamente.

IV.

A approximação mais simples, que se tem achado, he a que temos de Archimedes. Tendo o diametro 7 partes, o que a circumferencia contém destas partes, he entre 21,

Tendo o diametro 7 partes, a circumferencia tem perto de 22.

e

EST. VIII. e 22; e sabe-se que ella se aproxima muito mais a 22, do que a 21.

V.

As circumferencias dos circulos são entre si como os seus radios.

No mais he evidente, que se certamente se foubesse a razão, que huma só circumferencia tem com o seu radio, se saberia a de todas as mais circumferencias com os seus radios, devendo esta razão ser a mesma em todos os circulos. Esta proposição parece tão simples, que não ha necessidade de a demonstrar; pois se vê que quaesquer que fossem as operações, que se fizessem para medir huma circumferencia, servindo-se das partes do seu radio, seria preciso que se fizessem as mesmas para medir qualquer outra circumferencia, e que assim se lhe acharia o mesmo numero de partes do seu radio.

VI.

He evidente que os circulos tem
tam-

tambem a propriedade geral de todas as figuras semelhantes; (Parte I. Art. XLVII.) quero dizer, que as suas superficies estam na mesma proporção, em que estam os quadrados dos seus lados homologos; mas como para se applicar esta proposição aos circulos se não poderão tomar os seus lados, será preciso servirmo-nos dos radios, e então se verá que os circulos terão as suas áreas proporcionaes aos quadrados dos seus radios.

EST. VIII;
As áreas dos circulos são proporcionaes aos quadrados dos seus radios.

Se á primeira vista parecer que esta proposição se não deve deduzir do que dissemos no Artigo XLVII. da primeira Parte, e se queira huma particular demonstração, se note, que absolutamente viria a ser o mesmo a comparação das áreas dos dous circulos BCD, (Fig. 4. e 5.) EFG, ou as dos triangulos ABL, AEM, que lhes seriam ignaes, (Art. II.) suppondo que as suas bases BL, e EM fossem desenvolvidas das circum-

EST. VIII. circumferencias BCD, e EFG, e que as suas alturas fossem os radios AB, e AE. Ora segundo o precedente Artigo, estes triangulos seriam semelhantes. Logo as suas áreas estariam na mesma proporção, em que estam os quadrados dos seus lados homologos AB, AE, radios dos circulos BCD, e EFG. Logo, &c.

VII.

Os circulos, por causa da sua semelhança, terão tambem, como as figuras semelhantes, esta propriedade, que tomando os tres lados de hum triangulo rectangulo como radios, para com elles se descreverem tres circulos, aquelle circulo, a que a hypotenusa servir de radio, igualará os outros dous circulos tomados juntamente.

De tres circulos, a que servirem de radios os tres lados de hum triangulo rectangulo, aquelle, de que for radio a hypotenusa, valerá tanto, como os outros dous.

Assim se poderá sempre fazer hum circulo igual a dous circulos dados, e isto sem se tomar o trabalho de medir cada hum dos circulos.

los. Queira-se, por exemplo, fazer EST. VIII: hum tanque, que contenha em si tanta agua, como outros dous, tendo a mesma profundidade; ou se queira achar a abertura de hum cano de fonte, pelo qual passe tanta agua, como por dous canos dados, sem trabalho se conseguiria isto, seguindo o caminho, que temos indicado.

VIII.

Havendo para medir a superficie de huma coroa V, (Fig. 6.) figura comprehendida entre dous circulos concentricos EFG, BCD, isto he, Huma coroa he o espaço comprehendido entre dous circulos concentricos. entre dous circulos, que riveſsem ambos hum centro commum, o que logo nos occorreria, seria o medir separadamente as superficies dos dous circulos, e diminuir a mais pequena da maior. Mas he facil de perceber, que se póde resolver o problema de huma maneira mais commoda para a prática.

Ima-

EST. VIII. Imaginemos hum triangulo ABL , que tenha o radio AB por altura, e a sua base a recta BL igual á circumferencia BCD . Tirando-se pelo ponto E a recta EM parallela a BL , esta recta será igual á circumferencia EFG ; porque pela semelhança dos triangulos AEM , ABL haverá a mesma proporção entre AB , e BL , que houver entre AE , e EM . Ora por supposição, BL igualará a circumferencia, da qual AB será radio: logo EM igualará tambem a circumferencia, da qual será radio a linha AE , parte de AB . O mesmo sería de qualquer outra linha KI , parallela a BL , a qual sería sempre igual á circumferencia, da qual fosse radio AK .

Da igualdade supposta entre a circumferencia EFG , e a recta EM se segue necessariamente a igualdade do triangulo AEM com o circulo EFG : logo he preciso que o espaço rectilineo $EBLM$ seja igual á

co-

coroa proposta V. Ora este espaço EST. VIII, EBLM pôde-se facilmente reduzir ao rectângulo EBPH, cortando ML em duas partes iguaes MI, e IL, e tirando pelo ponto I sobre BL a perpendicular HIP, a qual dará o triangulo accrescentado MHI, igual ao triangulo diminuido PLI.

Logo se pelo ponto I se tirar a BL a parallela IK, que cortará EB em duas partes iguaes, a coroa proposta igual ao espaço EBLM, ou a EBPH, terá por medida o producto de EB por KI, de cuja circumferencia será radio AK.

Logo para se medir a coroa V, he necessario multiplicar a sua grossura EB pela circumferencia KOQ, chamada media, entre as circumferencias BCD, e EFG, porque ella excede a pequena circumferencia EFG, ou a recta EM na quantidade MH, igual a PL, quantidade, de que ella he excedida pela grande circumferencia BCD, ou pela recta BL,

Para se ter a medida de huma coroa, he necessario multiplicar a sua grossura pela circumferencia media.

Tra-

IX.

EST. VIII. Tratando-se de se medir huma figura Y, (Fig. 2.) composta de arcos de diferentes circulos, e de linhas rectas, ou huma figura Z, (Fig. 7.) composta unicamente de arcos de circulos, toda a difficuldade

O segmento de circulo he hum espaço terminado por hum arco, e pela sua corda.

A medição de todas as figuras circulares se reduz áquella do segmento.

se reduz a medir segmentos de circulos, isto he, a espaços taes, como ABCE, (Fig. 8.) terminados pelo arco ABC, e pela corda AC.

Porque as figuras inteiramente compostas de arcos de circulos, ou de arcos, e linhas rectas, todas se podem considerar como figuras rectilineas, augmentadas, ou diminuidas de certos segmentos.

X.

A medida de qualquer segmento ABCE (Fig. 8.) he facil de se achar, quando se sabe a do circulo; porque tirando-se as linhas AT, CT ao centro T do arco, se formará huma

ma

ma figura $ABCT$, chamada sector, cuja área será para o circulo, como o arco ABC para toda a circumferencia; e por consequencia terá por medida o producto de ametade do radio AT pelo arco ABC . Ora tendo-se determinado o sector, não será preciso mais do que diminuir-lhe o triangulo ACT para se ter o segmento $ABCE$.

EST. VIII.
O sector he huma porção de circulo terminada por dous radios, e pelo arco, que elles comprehendem. A sua medida he a do segmento.

XI.

Como succede muitas vezes, que quando se propõe de medir huma figura tal como Y , (Fig. 2.) não se tem o centro do arco HIK , e que sem este centro não se poderia medir a figura, pois que o methodo precedente requer o conhecimento do radio, he preciso que saibamos procurar o centro de hum arco de qualquer circulo.

Seja ABC (Fig. 9.) o arco de circulo proposto; se sobre este arco se tomarem dous pontos á vontade

Achar o centro do arco de qualquer circulo.

A,

EST. VIII. A, e B; e que destes pontos, como centros, se descreverem os quatro arcos $g o i$, $f o h$, $l p k$, $m p n$, os dous primeiros, com qualquer radio, e os dous segundos com o mesmo radio, ou qualquer outro que se quizer, he evidente que o centro procurado do arco ABC será na linha $o p$, tirada pelos pontos das intersecções o , p .

Escolhendo-se depois o terceiro ponto C no arco ABC, e servindo-se de B, e de C, da mesma forte que se fez de A, e de B, se terá a recta $q r$, na qual se achará o centro pedido. Logo este centro será o ponto de encontro T das linhas $o p$; $q r$.

XII.

Da mesma forte, qualquer situação, que se der a tres pontos, com tanto que não fiquem em linha recta, se poderá sempre fazer passar por elles hum arco de circulo, ou,
que

que vem a ser o mesmo, qualquer EST. VIII.
 que seja a proporção dos lados AC,
 BC de hum triangulo ABC (Fig.
 10.) com a sua base, se poderá sem-
 pre circumfcrever hum circulo a es-
 te triangulo.

XIII.

O methodo, que acabamos de
 dar, para circumfcrever hum cir-
 culo a hum triangulo, sendo suc-
 cessivamente applicado a differentes
 triangulos ACB, AEB, AGB (Fig.
 11.) mais, ou menos elevados a re-
 peito da base delles AB, muito bem
 se percebe, que em passando de hum
 triangulo ACB, cujo angulo do ver-
 tice he muito agudo, a outros trian-
 gulos AEB, AGB, que tem os an-
 gulos dos seus vertices mais aber-
 tos, o centro do circulo circum-
 ferito se avizinha continuamente
 para AB, e que este centro passa de-
 pois para baixo de AB, quando o
 angulo do vertice AGB chega a hu-

K

ma

EST. VIII. ma certa abertura. Ora vendo-se passar este centro para baixo de AB , depois de se ter visto por cima, parece-me que deve vir ao pensamento o procurar de qual especie he o triangulo AFB , (Fig. 12.) quando o circulo circumscrito tem o seu centro sobre AB .

Para se conhecer este triangulo AFB , se principiará notando, que neste caso particular a porção de circulo circumscrito a hum triangulo, deve ser exactamente hum semicirculo: com effeito o centro do circulo devendo estar sobre a base AB , a qual tem por supposição as duas extremidades na circumferencia, o centro M não poderá deixar de estar situado precisamente no meio de AB , de forte que AB será necessariamente hum diametro.

Se de qual-
quer ponto
da circum-
ferencia de
hum semi-
circulo se ti-

Ver-se-ha depois, que tirando-se as linhas FA , FB de qualquer ponto F do semicirculo, o angulo AFB será recto. Porque tirando FM ,

os dous triangulos AFM, MFB serão ifosceles. Logo os dous angulos AFM, MFB serão respectivamente iguaes aos angulos FAM, FMB; ou, que vem a ser o mesmo, o angulo total AFB igualará a somma dos dous angulos FAM, FBM; porém os tres angulos AFB, FAM, FBM, todos juntos, valem dous rectos. Logo o angulo AFB será recto.

EST. VIII.
rarem duas rectas ás extremidades do diametro, se terá hum angulo recto.

Assim descrevendo-se na base AB hum triangulo rectangulo, qualquer que seja, este triangulo terá a propriedade pedida de ser inscrito em hum circulo, cujo centro esteja na base.

XIV.

Esta propriedade do circulo de que o angulo, que tem o seu vertice na semicircumferencia, e que assenta sobre o diametro, he sempre recto, nos conduz a procurar se as outras partes do circulo terão algu-

EST. IX. ma propriedade analogica ; se , por exemplo , os angulos ACB , (Estampa IX. Fig. 1.) AEB , AFB , tomados em hum segmento $ACEFB$, seriam todos entre si iguaes , como o são aquelles do semicirculo.

Para nos certificarmos disto , principiaremos procurando o valor de hum destes angulos , e depois veremos se cada hum dos outros tem o mesmo valor. Tomemos , por exemplo , o angulo AEB , (Fig. 2.) o vertice do qual E está no meio do arco AEB . Como a linha EDG , que passa pelo centro D , reparte este angulo em duas partes iguaes , bastará medir o angulo AEG , sua metade ; ou , o que he o mesmo , bastará saber-se qual parte he o angulo AEG , de hum angulo já medido , tal como ADG ; digo pois , que o angulo ADG já está medido , porque nós sabemos que o arco AG he a sua medida. (Part. I. Art. LII.)

Fazendo-se ' reflexão em que o
tri-

triangulo AED he isosceles , facil-^{EST. IX.}mente se verá que o angulo AEG he metade do angulo ADG, porque os angulos AED, EAD (Part. I. Art. XXXI.) são iguaes ; mas (Parte I. Art. LXVIII.) estes dous angulos juntos valem o angulo exterior ADG. Logo o angulo AED, ou AEG, he a metade do angulo ADG.

Pela mesma razão, o angulo DEB será a metade do angulo GDB. Logo o angulo total AEB igualará a metade do angulo ADB. Logo a sua medida será a metade do arco AGB.

XV.

Tendo-se medido o angulo AEB, para se saber se elle he igual a cada hum dos outros angulos, que tem os seus vertices no mesmo segmento, he preciso examinar se hum destes angulos tomado á vontade, AFB (Fig. 3.) por exemplo, he tambem
a me-

EST. IX. a metade do angulo no centro ADB. Facilmente nos certificaremos disto, tirando a recta FDG pelo centro; porque então se verá que o angulo AFB será composto de outros dous AFD, DFB, que pelo Artigo precedente serão as metades dos angulos ADG, GDB; do que se concluirá que o angulo total AFB será a metade do angulo ADB; e applicando o mesmo discurso a todos os angulos ACB, (Fig. 1.) AEB, AFB, que tem os seus vertices na circumferencia, e que assentam sobre o mesmo arco AGB, se poderá concluir, que estes angulos são iguaes entre si, assim como no Artigo precedente o tinhamos suspeitado.

XVI.

Entre os differentes angulos, que tem os seus vertices no arco ACEFB, (Fig. 1.) ha alguns, que poderiam á primeira vista parecer não serem comprehendidos na demonstração

ção precedente ; são estes angulos, EST. IX.
 taes como AFB , (Fig. 4.) em que
 a recta FDG tirada pelo centro passa
 por fóra do angulo ADB. Não. obf-
 tante , observando sempre que o an-
 gulo GFA he a metade do angulo
 GDA , e o angulo DFB a metade do
 angulo GDB , se verá que o angulo
 AFB , excessso do angulo DFB sobre
 o angulo DFA , será neste caso a me-
 tade do angulo ADB , excessso do
 angulo GDB sobre GDA.

XVII.

Pelas figuras , de que nos temos
 fervido , se poderia tambem enten-
 der que a demonstração precedente
 não conviria senão aos segmentos
 maiores do que hum semicirculo ;
 porém he facil de ver que hum an-
 gulo qualquer , tal como AFB , (Fig.
 5.) que tivesse o seu vertice em hum
 segmento mais pequeno do que o
 semicirculo , seria sempre composto
 de outros dous DFB , DFA , me-
 ta-

EST. IX. tades dos angulos BDG , ADG , e por consequencia que este angulo AFB teria por medida a metade dos dous arcos BG , AG , isto he, a metade do arco AGB .

XVIII.

Depois de termos visto que em hum mesmo segmento os angulos AEB , (Fig. 6.) AFB , AHB , suppostos na circumferencia, são todos iguaes, tentamo-nos a examinar em que se torna o angulo AQB , quando o seu vertice Q se confunde com o ponto B , extremidade da base AB . Este angulo desvanecer se-hia então? Porém não parece possivel, que sem elle se ir fechando por grãos, viesse de repente a extinguir-se. Não se percebe qual seja o ponto, depois do qual este angulo cessasse de existir; como se virá pois a achar a sua medida? He esta huua difficuldade, que não se póde resolver, sem que se recorra á Geometria dos infinitos,

da

da qual todos os homens tem ao me- EST. IX:
nos huma imperfeita idéa , a qual
basta sómente aclarar.

Observemos pois , que quando o
ponto E se avizinha para B , mu-
dando-se em F , H , Q , &c. a re-
cta EB se diminue continuadamente ;
e que o angulo EBA , que ella faz
com a recta AB , se abre cada vez
mais. Porém por mais curta que ve-
nha a ser a linha QB , o angulo
QBA não deixará com tudo de ser
hum angulo , pois que para o fazer-
mos sensível , bastará produzir a li-
nha diminuta QB para R. Mas de-
ve tambem ser assim , quando a li-
nha QB , á força de se diminuir , se
reduzir em fim a nada ? Em que veio
então a parar a sua posição ? A li-
nha produzida em que se tornou ?

He evidente que não he outra
coisa senão a recta BS , que toca o
circulo em hum só ponto B , sem o en-
contrar em alguma outra parte , e que
por esta razão se chama Tangente.

De-

A tangente
ao circulo
he a linha .
que sómente
o toca em
hum só pon-
to.

EST. IX. Demais. Claro está, que em quanto a linha EB se diminue continuamente até em fim se extinguir, a recta AE, que successivamente se muda em AF, AH, AQ, &c. se avizinha sempre para AB, e que por fim se confunde com ella. Logo o angulo na circumferencia AEB, depois de se ter mudado em AFB, AHB, AQB, vem a ser em ultimo lugar o angulo ABS, feito pela corda AB, e pela tangente BS; e este angulo, a que chamam angulo no segmento, deve conservar sempre a propriedade de ter por medida a metade do arco AGB.

O angulo no segmento he aquelle, que he feito pela corda, e pela tangente.

Tem por medida a metade do arco do segmento.

Ainda que esta demonstração seja talvez hum pouco abstracta para os Principiantes, entendi ser a proposito de a dar, porque será utilissimo áquelles, que quizerem adiantar os seus estudos até á Geometria dos infinitos, o terem-se costumado anticipadamente a semelhantes considerações.

Se,

Se, não obstante, os Principiantes EST. IX. acharem que esta demonstração he affima das suas forças, he facil de os pôr em estado de descobrirem outra, em lhes explicando a principal propriedade das Tangentes.

XIX.

Esta propriedade he, que huma tangente ao circulo, de qualquer ponto que seja B, (Fig. 7.) deve ser perpendicular ao diametro IDB, que passa por este ponto. Porque como a curvidade do circulo he tão uniforme, que qualquer diametro IDB o reparte em dous semicirculos IAB, IOB, iguaes, e igualmente situados respeito a este diametro, he preciso que as duas partes BS, BH da tangente commua a estes dous semicirculos, sejam tambem igualmente situadas a respeito deste diametro. Ora isto não podia ser, sem que IDB fosse perpendicular á tangente HBS.

A tangente he perpendicular ao diametro, que passa pelo ponto, em que ella toca na circumferencia.

Dis-

XX.

EST. IX. Disto se verá facilmente a razão, por que o angulo no segmento ABS tem por medida a metade do arco AGB .

Porque o angulo ADB , junto com os dous angulos iguaes DAB , DBA , fazem (Part. I. Art. LXIV.) dous angulos rectos. Logo a metade do angulo ADB , junto com o angulo DBA , faz hum recto. Mas ajuntando o angulo DBA ao angulo ABS , dá tambem hum recto.

Logo o angulo ABS he igual á metade do angulo ADB . Logo a medida de ABS será a metade do arco AGB .

XXI.

A segunda demonstração, que acabamos de dar da propriedade do circulo, de que o angulo ABS tem por medida a metade do arco AGB , nos dá a solução do seguinte problema.

Def-

Descrever sobre AB (Fig. 8. e 9.) EST. IX.
 hum segmento capaz do angulo formado L ; isto he , hum segmento AFB, no qual todos os angulos AFB na circumferencia sejam iguaes ao angulo L.

Que cousa seja hum segmento capaz de hum angulo dado.

Para se resolver este problema, será preciso fazer em A, e em B os angulos BAS, e ABS, cada hum igual ao angulo L; e levantar sobre AS, e sobre BS as duas perpendiculares AD, e BD, que encontrando-se em D, darão o centro do arco procurado AFB.

Maneira de fazer hum segmento capaz de hum angulo dado.

Porque pelo Artigo XIX. as retas BS, e AS serão as tangentes do circulo, o centro do qual he D, e o radio AD, ou BD; pois que BD, ou AD são perpendiculares a BS, e a AS. Demais, pelo Artigo precedente o angulo ABS tem por medida a metade de AGB, e pelo Artigo XV. os angulos taes, como AFB, são tambem medidos por a metade de AGB. Logo estes angulos

EST. IX. los AFB serão iguaes a ABS , isto he, ao angulo L, como elle se pedia.

XXII.

O descubrimento das propriedades dos segmentos do circulo , que acabamos de explicar , he devido verisimilmente á simples curiosidade dos Geometras ; mas teve este descubrimento o effeito , que outros muitos sempre tem. O que ao principio parecia não ser util , o veio a ser depois , tendo-se feito na prática excellentes applicações das propriedades do circulo , que acabamos de demonstrar. Eu não darei senão huma destas applicações , a qual se achará na solução do seguinte problema , que he muitas vezes necessario na Geografia.

Achar a distancia de hum lugar a outros tres , dos quaes se sabem as posições.

A, B, C, (Fig. 10.) são tres lugares , dos quaes se sabe as respectivas distancias AB , BC , AC. Quer-se saber em que distancia destes lu-

lugares está o ponto D , de donde EST. IX. se podem ver todos os tres; mas de donde se não póde fahir para operar sobre o terreno.

Principiar-se-ha a traçar em papel tres pontos a, b, c , (Fig. 10. e 11.) que sejam entre si situados do modo, que estão os tres pontos A, B, C , isto he em linguagem geometrica, se fará o triangulo abc semelhante ao triangulo ABC .

Tendo-se depois observado com o semicirculo a grandeza dos angulos ADB, BCD , se fará sobre ab o segmento de circulo adb , capaz do angulo ADB ; e sobre a recta bc o segmento de circulo bcd , capaz do angulo BDC , o encontro d destes dous segmentos desenhará no papel a posição do lugar D , isto he, que as linhas da, db, dc estarão na mesma proporção a respeito de ab, bc, ac , como as distancias procuradas DA, DB, DC , a respeito das distancias dadas AB, BC, AC ;
o que

EST. IX. O que não tem necessidade de demonstração, depois do que se viu sobre as figuras semelhantes.

XXIII.

Facilmente se podia demonstrar, que na prática se tem tirado varios outros soccorros das propriedades do circulo, que se acabam de demonstrar; porém he mais a proposito passar a outras propriedades do circulo, as quaes foram tiradas das precedentes, e que tambem tiveram a sua utilidade.

EST. X. Para proceder com ordem no descobrimento destas propriedades, principiaremos, observando que dous angulos, quaesquer que sejam EDC, (Estamp. 10. Fig. 1.) EBC, que assentam sobre o mesmo arco EC, sendo iguaes, se segue que os triangulos DAE, BAC tem os angulos iguaes; isto he, (Part. I. Art. XXXIX.) que estes triangulos são semelhantes.

Pois

Pois pela mesma razão, por que EST. X. o angulo EDC he igual ao angulo EBC, o angulo DEB ferá igual ao angulo DCB; e quanto aos angulos DAE, BAC, elles serão visivelmente iguaes; seja porque são feitos com as mesmas linhas, ou porque dous triangulos, hum dos quaes tem dous angulos respectivamente iguaes a dous angulos do outro, tem tambem necessariamente o terceiro angulo igual. (P. I. Art. XXXVIII.)

Para depois mais facilmente se reconhecer nos triangulos ADE, (Figur. 1. e 2.) ABC as propriedades geraes dos triangulos semelhantes, applicaremos o triangulo DAE sobre o triangulo BAC, pondo AD sobre AB, e AE sobre AC, a fim que DE seja parallela a BC. Nós então nos lembraremos

1.º Que se dous triangulos ADE, ABC são semelhantes, os quatro lados AC, AE, AB, AD estão em proporção. (Part. I. Art. XXXIX.)

L

Que

EST. X.

2.^o Que em toda a proporção, o producto dos extremos he igual ao producto dos medios; (Part. II. Art. VIII.) e disto concluiremos, que o rectangulo, ou o producto de AC por AD he igual ao rectangulo de AE por AB; propriedade notabilissima do circulo, que se póde exprimir deste modo: Se em hum circulo se tiram á vontade duas rectas, que se cortem, o producto das duas partes da primeira he igual ao producto das duas partes da segunda.

Se duas cordas se cortarem em hum circulo, o rectangulo das partes de huma he igual ao rectangulo das partes da outra.

XXIV.

Se as duas rectas BE, DC (Fig. 3.) se cortassem perpendicularmente, e que huma destas duas rectas fosse hum diametro DC, he tambem evidente que as duas partes AB, AE, da outra recta BE, seriam entre si iguaes; de sorte que a propriedade precedente se exprimiria deste modo neste caso particular. Se sobre o diametro DC de hum circulo se levantar

O quadrado de huma perpendicular-

tar

tar huma perpendicular qualquer que seja AB, o quadrado desta perpendicular será igual ao rectangulo de AD por AC.

XXV.

Succede muitas vezes que he necessario mudar hum rectangulo em hum quadrado; o Artigo precedente nos dá hum meio facil: seja ACFE (Figura 4.) o rectangulo proposto, prolongue-se AC para D, de sorte que AD seja igual a AE, e se descreva o semicirculo DBC, o diametro do qual seja DC. Prolongando-se depois o lado EA, até que este encontre o semicirculo, se terá AB, que virá a ser o lado do quadrado perdido ABGH, igual ao rectangulo dado AFCE.

XXVI.

Propõe-se muitas vezes hum problema, que não he outra cousa, senão o que acabamos de resolver,

L ii apre-

EST. X.
lar qualquer
ao diametro
de hum cir-
culo, he
igual ao re-
ctangulo das
duas partes
do diame-
tro.

Reduzir hū
rectangulo
a hum
quadrado.

EST. X.
Que cousa
seja huma
media pro-
porcional
entre duas
linhas re-
ctas.

apresentado de outro modo, o qual he de achar huma linha, que seja media proporcional entre duas linhas dadas; entende-se então por media proporcional aquella linha, que he tão grande a respeito da mais pequena das duas linhas dadas, quanto ella he pequena a respeito da maior; isto he, que se AB , por exemplo, he media proporcional entre AD , e AC , se poderá dizer, que AD he para AB , como AB he para AC . Ora he bem facil de conhecer que este problema he o mesmo que o precedente, pois que (Part. II. Art. VIII.) o producto de AD por AC , isto he, o rectangulo destas duas linhas, he igual ao producto de AB por AB , isto he ao quadrado de AB .

Maneira de
o achar.

Logo quando se quizer achar huma media proporcional entre duas linhas dadas, se mudará o rectangulo destas duas linhas em hum quadrado, o lado do qual será a linha procurada.

Tam-

XXVII.

Tambem se póde achar huma EST. X.
 media proporcional entre duas linhas Outro mo-
 de outra maneira , que se segue da do.
 propriedade do circulo , explicada
 no Artigo XIII. Supponhamos que
 AC (Fig. 5.) seja a maior das duas
 linhas dadas , e AD a mais peque-
 na ; levante-se DB perpendicular-
 mente sobre AC, e o ponto B, on-
 de ella encontrar o semicirculo ABC,
 traçado sobre o diametro AC, dará
 a linha AB, media proporcional en-
 tre AD, e AC. Porque tirando BC,
 claro está que o triangulo ABC será
 rectangulo em B. Logo (Part. I. Art.
 XXXVIII.) este triangulo será seme-
 lhante ao triangulo ABD, pois que
 além disto estes dous triangulos tem
 o angulo A de commum ; e se os
 triangulos ABD, e ABC são seme-
 lhantes, elles tem os seus lados pro-
 porcionaes. Logo AD he para AB,
 como AB para AC. Logo AB he
 me-

EST. X. media proporcional entre AD , e AC.

XXVIII.

Reduzir huma figura rectilinea a hum quadrado.

Querendo-se reduzir huma figura rectilinea a hum quadrado, não será preciso mais (para reduzir este problema ao Artigo XXV.) do que fazer desta figura hum rectangulo; o que será muito facil, por causa de que as figuras rectilineas não são senão ajuntamentos de triangulos, que cada triangulo he a metade de hum rectangulo, que tem a mesma base, e a mesma altura; e que todos os rectangulos provindos dos triangulos, não farão mais do que hum só rectangulo, em se dando a todos huma altura commua. (Part. II. Art. VI.)

XXIX.

As figuras, que nos seus contornos contiverem arcos de circulos, tambem se poderão reduzir a quadrado.

drados, quando praticamente se tiver EST. X. medido o comprimento dos arcos, de que ellas forem compostas; porque se poderá então reduzir estas figuras, assim como as rectilneas, a rectangulos; para o que se recorrerá aos Artigos IX. e X., onde se ensinou a medir toda a sorte de figuras circulares.

XXX.

Tambem da propriedade do circulo explicada no Art. XXIV. se tira hum methodo muito facil para fazer hum quadrado, que seja para hum quadrado dado, em razão dada; problema, que tinhamos promettido no Artigo XXII. da segunda Parte.

Supponhamos, por exemplo, que se propõe de fazer hum quadrado, que seja para o quadrado ABCD, (Fig. 6.) como a linha M para a linha N; divide-se (Part. I. Art. XLI.) o lado CB no ponto E, de sorte que CB seja para BE, como a linha

Fazer hum quadrado, que seja para outro em razão dada.

EST. X. nha N para a linha M; tirando depois a parallela EF a AB, o rectangulo AB \bar{E} F terá a mesma superficie, que o quadrado pedido. Logo não faltará mais do que reduzir este rectangulo a hum quadrado.

XXXI.

Fazer hum polygono, que esteja em razão dada com hum polygono semelhante.

Querendo-se fazer hum polygono HIKLM, (Fig. 8.) que seja a hum polygono semelhante ABCDE (Fig. 7.) na razão da linha X para a linha Y, se principiará, fazendo sobre o lado AB do polygono dado ABCDE o quadrado ABGF; depois se procurará outro quadrado HIOQ, que seja para o quadrado ABGF, como a linha X para a linha Y. E então descrevendo sobre o lado HI deste quadrado hum polygono HIKLM, semelhante ao primeiro ABCDE, este novo polygono será aquelle, que se pedia. A razão disto he bem facil de achar, lembrando-nos (Part. I. Art. XLVIII,) que as figuras

ras semelhantes são entre si , como EST. X.
os quadrados dos seus lados homólogos.

XXXII.

Querendo-se fazer hum circulo , a área do qual seja para aquella de hum circulo dado , como X para Y , será preciso construir hum quadrado , que seja para o quadrado do radio deste primeiro circulo , como X para Y , e o lado deste novo quadrado será o radio do circulo pedido.

Fazer hum circulo, que seja para outro circulo em razão dada.

XXXIII.

Eis-aqui tambem huma propriedade do circulo tirada daquella , que deram os problemas precedentes.

Se de hum ponto A , (Fig. 9.) tomado fóra do circulo , se tirão á vontade duas rectas ABC , ADE , que cada huma córte a circumferencia em dous pontos , e que se tirem as rectas CD , BE , os triangulos ACD ,

Se de hum ponto tomado fóra do circulo se tiram duas linhas , que o atravessem , os rectangulos destas

EST. X.
duas rectas
feitos pelas
suas partes
exteriores,
serão iguaes.

ACD, AEB serão semelhantes, pois que o angulo A he commum aos dous triangulos; e demais disto elles tem os angulos na circumferencia C, e E iguaes. Ora de serem os triangulos CAD, EAB semelhantes se segue, que as quatro linhas AB, AD, AE, AC estam em proporção, e por consequencia o rectangulo das duas rectas AB, AC he igual ao rectangulo das duas rectas AD, AE; o que se pode exprimir deste modo. Se de hum ponto qualquer que seja A, tomado fóra do circulo, se tiram á vontade duas linhas rectas AC, AE, que atravessem este circulo, o rectangulo da recta AC pela sua parte exterior AB, será igual ao rectangulo da recta AE pela sua parte exterior AD.

XXXIV.

Quando a recta, que parte do ponto A, em lugar de cortar o circulo só simplesmente o toca, como AF,

AF, a propriedade precedente se EST. X.
troca nesta : o quadrado de huma O quadrado
tangente AF he igual ao rectangn- da tangente
lo produzido pela secante qualquer he igual ao
que seja AE, e pela sua parte exte- rectangulo
rior AD; o que he bem facil de de- da secante
monstrar. Porque considerando a re- pela sua par-
cta AF, que toca o circulo, como te exterior.
huma linha, que o cortaria em dous
pontos infinitamente vizinhos, as li-
nhas AB, AC não vem a fer senão
huma mesma linha AF, e em lugar
do rectangulo de AB por AC, se
tem o quadrado de AF.

XXXV.

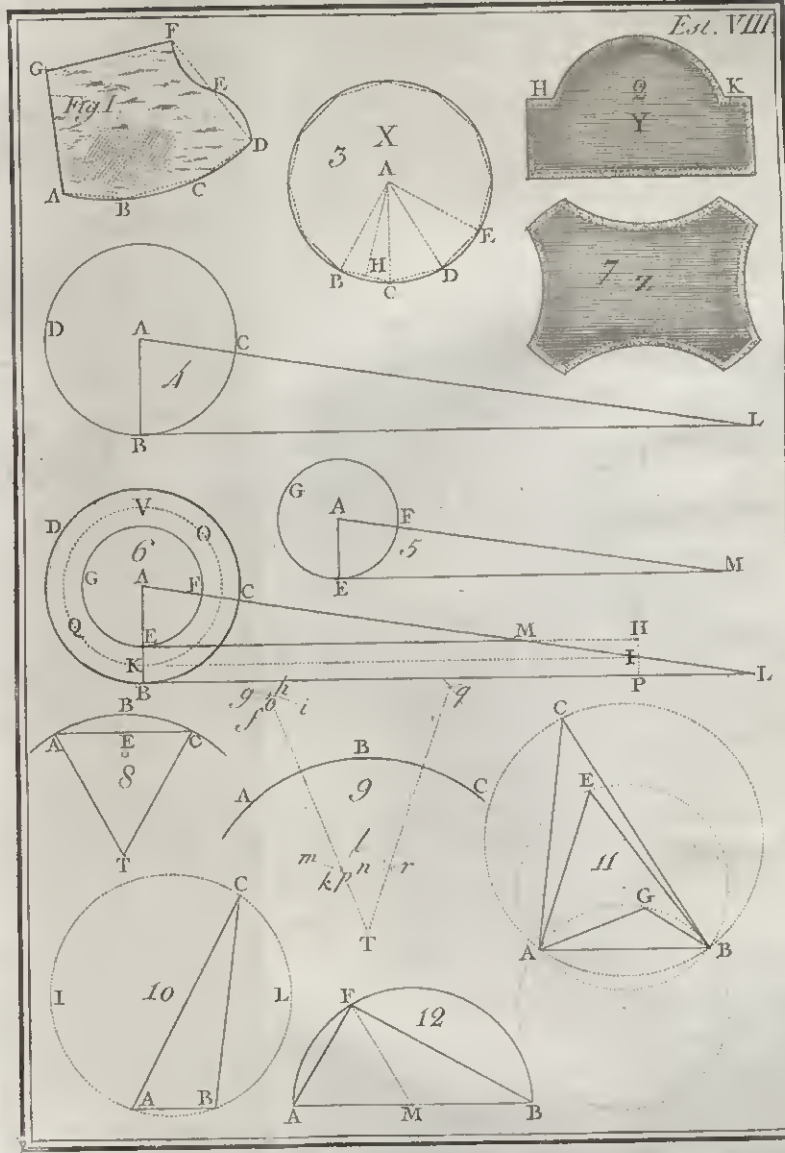
A proposição demonstrada no Ar-
tigo precedente, instruindo-nos do
valor do quadrado da tangente AF,
não nos ensina a tirar esta tangente
do ponto dado A. Para ella se ti- Tirar huma
rar, nos lembraremos (Art. XIX.) tangente ao
que o radio FG (Fig. 10.) he per- circulo de
pendicular á tangente FA. Assim não hum ponto
falta mais do que achar no circulo dado fora
delle.

EST. X. dado o ponto F, de tal forte, que o angulo AFG seja recto. Logo em descrevendo hum semicirculo sobre AG, o ponto, onde elle cortar o circulo FKO, será (Art. XIII.) o ponto procurado F.

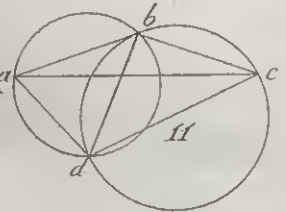
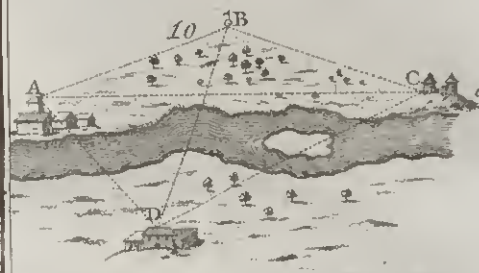
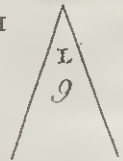
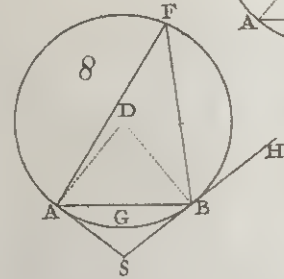
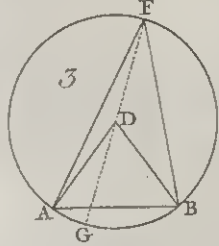
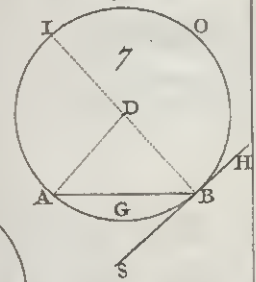
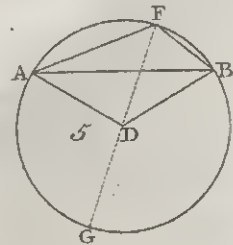
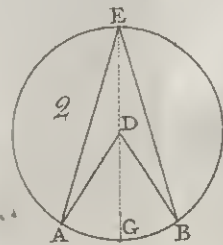
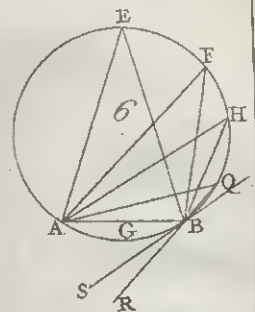
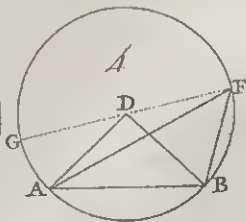
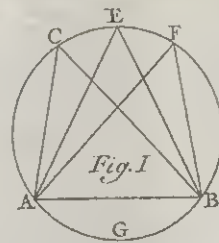
FIM DA PARTE TERCEIRA.



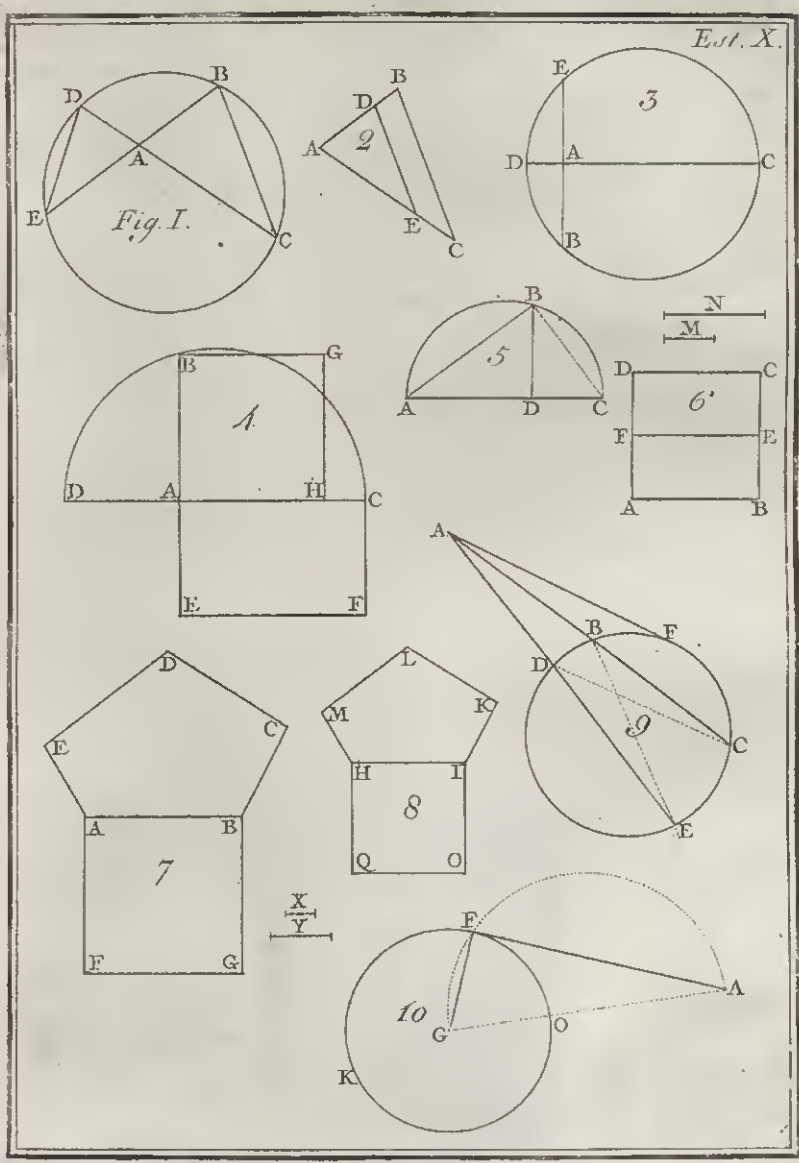
ELE-















ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

PARTE QUARTA.

*Da maneira de medir os sólidos, e as
suas superficies.*



S principios, que estabelecemos nas tres primeiras Partes desta Obra, nos seriam sufficientes para resolver problemas muito mais difficeis, do que aquelles, que vamos propôr-nos; porém he mais da ordem, que temos seguido precedentemente, o passar ago-

agora á medição dos sólidos ; isto he , das extensões terminadas cada huma por tres dimensões , comprimento , largura , e profundidade.

Esta investigação foi sem dúvida hum dos primeiros objectos , em que se fixou a attenção dos Geometras. Quereriam saber , por exemplo , quanto teria de pedra de cantaria huma muralha , da qual se sabia a altura **AD**, (Estamp. XI. Fig. 1.) a largura **AB**, e a profundidade , ou grossura **BG**. Teriam proposto consigo de determinar a quantidade de agua , que em si conteria hum fosso , ou huma cisterna **ABCD** ; (Fig. 2.) quereriam achar a solidez de huma torre , de hum obelisco , de huma casa , &c.

Para tratarmos das figuras , que tem as tres dimensões , da mesma maneira que tratamos as que não tem senão duas , principiaremos , examinando os sólidos , que são terminados por planos.

Não temos necessidade da man-
nci-

neira de medir as superficies destes EST. XI.
corpos, porque ellas não podem ser
senão ajuntamentos de figuras recti-
lineas; e por consequencia depende
a sua medição do que na primeira
Parte se disse.

I.

Para se medir a solidez dos cor-
pos, he natural de os reduzir todos
ao sólido o mais simples, assim como
para se medir as superficies, se redu-
zirão todas ao quadrado. Ora o só-
lido mais simples que ha, he o cu-
bo, que he com effeito em genero
de sólidos, o que o quadrado he em
superficies; e vem a ser hum espaço
tal, como *abc defgh*, (Fig. 3.) cujo
comprimento, largura, e profundi-
dade são iguaes; ou, que he o mes-
mo, he huma figura terminada por seis
faces iguaes, que são huns quadrados.

Chama-se lado do cubo o lado
dos quadrados, que lhe servem de
faces.

O cubo he
hum sólido
terminado
por seis qua-
drados.
Esta he a
medida cõ-
mua dos só-
lidos.

Por

EST. XI. Por hum pé cubico se entende hum cubo, o lado do qual he de hum pé; da mesma forte huma pollegada cubica he hum cubo, cujo lado he de huma pollegada, &c.

II.

Os sólidos, que commumente ha para se medir, são figuras, como ABCDEFGH (Fig. 1.) terminadas por seis faces rectangulas ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GEFH, ABGH. Chamão-se estes sólidos parallelepipedos, porque as suas faces oppostas conservando em todos os seus pontos a mesma distancia humas das outras, são chamadas paralelas; assim como as linhas se chamam paralelas, quando ellas conservam sempre a mesma distancia.

O parallelepipedo he hum sólido terminado por seis rectangulos.

Os planos paralelos são aquelles, que conservam sempre entre si a mesma distancia.

III.

Ora propondo-se de medir os sólidos desta especie, a analogia deste problema com aquelle, onde se tra-

tou

tou da medição das superficies re- EST. XI.
ctangulares, nos dará hum meio fa-
cil de o resolver.

Principiar-se-ha medindo separa- Medição do
paralelepi-
pedo.
damente a altura AD, a largura
AB, e a profundidade BG da figura
proposta, seja por palmos, ou por
pollegadas, &c. Depois se multipli-
cará hum por outro os tres numeros,
que se tiverem achado; e o producto,
que sahir desta multiplicação, expri-
mirá quanto conterà o parallelepipe-
do de palmos, ou de pollegadas cu-
bicas, &c. segundo se tiverem me-
dido as dimensões por palmos, ou
por pollegadas, &c. Para melhor
mostrarmos como se faz esta opera-
ção, daremos hum exemplo della.

Supponhamos que a altura AD
seja de 6 palmos, a largura AB de 5,
e a profundidade BG de 4, o rectan-
gulo ABCD (Part. I. Art. XI.) terá
6 vezes 5, ou 30 palmos quadra-
dos. Se depois se imaginar que as
linhas BG, CF, DE, AH, que to-
M das

EST. XI. das medem igualmente a profundidade do sólido, sejam repartidas cada huma em quatro partes iguaes; e que pelos pontos de divisão correspondentes se façam passar outros tantos planos parallellos huns aos outros, estes planos dividirão o parallelepipedo proposto em outros quatro parallelepipedos, que cada hum terá hum palmo de profundidade, e que todos serão iguaes, e semelhantes. Ora a inspecção somente da figura dá a conhecer que o primeiro destes parallelepipedos contém 30 palmos cubicos, pois que a sua face exterior ABCD contém 30 palmos quadrados. Logo o sólido total ABCDEFGH conterá 4 vezes 30, ou 120 palmos cubicos.

IV.

Não nos demoramos a explicar os differentes modos, de que na prática se pôde usar para se construirem os parallelepipedos, porque estes tão faccis são

são de achar , que não ha alguém **EST. XI.**
 a quem não possam occorrer. Porém
 daremos o seguinte modo de formar
 o parallelepipedo , que de todos he
 o mais util , que se póde considerar.

Imaginando-se que hum quadra-
 do , ou rectangulo **ABGH** se move
 parallelamente a si mesmo , de for-
 te que os seus quatro angulos **A** ,
B , **G** , **H** passem cada hum por
 huma das quatro linhas **AD** , **BC** ,
GF , **HE** , perpendiculares ao plano
 do rectangulo **ABGH** , se verá que
 este rectangulo pelo movimento , que
 temos descripto , formará o paralle-
 lepipedo **ABCDEFGH**.

Os paralle-
 lepipedos
 são produzi-
 dos por hum
 rectangulo ,
 que se move
 parallela-
 mente a si
 mesmo.

V.

He quasi inutil o advertir , que
 por huma linha perpendicular a
 hum plano entendemos huma linha ,
 que não pende para alguma parte
 sobre este plano ; e da mesma for-
 te , que hum plano , que não pen-
 de mais para huma parte do que pa-

A linha per-
 pendicular a
 hum plano
 he aquella ,
 que não
 pende para
 alguma par-
 te deste pla-
 no.

O mesmo
 he de hum

EST. XI. ra a outra sobre outro plano, se diz
 plano per- ser perpendicular a este segundo pla-
 pendicular a no; estas duas definições são analo-
 outro plano. gas áquella, que démos de huma li-
 nha perpendicular a outra linha.

VI.

Ora disto se segue, que a linha
 AB, (Fig. 4.) que he perpendicular
 ao plano X, deve ser perpendicular
 a todas as linhas AC, AD, AE, &c.
 que partem da extremidade A desta
 linha, e que estam no mesmo plano.
 Porque he evidente, que se ella pen-
 desse sobre alguma destas linhas, es-
 taria inclinada para alguma parte do
 plano. Logo ella lhe não seria per-
 pendicular.

A linha, que
 he perpen-
 dicular a hū
 plano, he
 perpendicu-
 lar a todas
 as linhas
 deste plano,
 que partem
 do ponto,
 em que esta
 linha cabe.

VII.

Para se representar de hum mo-
 do bem sensível, o como a linha AB
 póde ser perpendicular a todas as li-
 nhas, que partem da sua extremida-
 de

de A , não haverá mais do que fa-EST. XI.
zer huma figura em relevo da ma-
neira seguinte.

Constua-se de qualquer materia ,
que seja bem igual , e facil de dobrar ,
como papel grosso , hum rectangulo
FGDE , (Fig. 5.) repartido em duas
partes iguaes pela recta AB , per-
pendicular aos lados ED , FG ; do-
bre-se depois este rectangulo , de for-
te que a préga fique na linha AB ,
e assim dobrado se transporte sobre
o plano X. He evidente , que qual-
quer que seja a abertura , que se der
ás duas partes FBAE , GBAD do
rectangulo dobrado EADGBF , estas
duas partes ficarão sempre applica-
das sobre o plano X , sem que a li-
nha AB mude de posição , respecti-
vamente a este plano. Logo esta re-
cta AB será perpendicular a todas
as linhas , que partem do seu pé pos-
tas no plano X , pois que os lados
AE , AD do rectangulo dobrado ,
se applicarão successivamente sobre
ca-

EST. XI. cada huma destas linhas pelo movimento, que temos dito.

VIII.

Da construcção precedente se tira huma prática muito commoda para elevar de hum ponto dado em hum plano huma linha perpendicular a este plano; ou para abaixar de hum ponto dado fóra do plano huma linha, que seja perpendicular a este plano. Porque sendo, por exemplo, o ponto proposto no plano em A, (Fig. 7.) on seja fóra d'elle, como em H, se poderá sempre mover o rectangulo EFBGDA sobre o plano X, até que a préga B toque no ponto dado; e AB virá a ser neste caso a perpendicular pedida.

Prática simples para levantar, ou abaixar perpendiculares aos planos.

IX.

Do que tambem se segue, que huma linha AB será perpendicular a hum plano X, todas as vezes que ella for perpendicular a duas linhas AE,

Huma linha será perpendicular a hũ

AE, e AD deste plano. Porque então AB poderá ser considerada como a dobra de hum rectangulo, do qual se applicasse hum dos lados da dobra sobre AE, e o outro sobre AD. Ora esta dobra não poderia deixar de ser perpendicular a este plano X.

EST. XI.
plano, se ella for perpendicular a duas linhas deste plano, que partem do ponto, onde ella cahe.

X.

Querendo-se levantar sobre huma linha, qualquer que seja KL, hum plano perpendicular ao plano X, no qual esteja esta linha, poderá servir para isto o rectangulo dobrado GBFEAD; porque não será preciso mais, do que pôr sobre a linha KL o lado AD de huma das partes ADGB deste rectangulo dobrado, e o plano desta parte ADGB será aquelle, que se pedia.

Maneira de levantar hã plano perpendicular a outro.

XI.

Facilmente se verá, que pondo-se o terceiro plano Y (Fig. 8.) sobre os dous lados FB, e BG do mesmo
re-

EST. XI. rectangulo dobrado, este plano Y será também perpendicular á linha AB, e por consequencia paralelo ao plano X.

Para se pôr
hum plano
paralelo a
outro.

Logo se em hum plano X se levantarem tres perpendiculares EF, AB, DG de igual comprimento, não as pondo em linha recta, o plano Y, que passará pelos tres pontos F, B, G, será paralelo ao plano X.

XII.

Quando dous planos não estiverem parallellos, será facil de saber o angulo, que elles entre si fazem, servindo-se do nosso rectangulo dobrado. Para isto se conseguir, se applicará huma das duas partes ABGD (Figura 9.) deste rectangulo sobre o plano X; he evidente que o angulo EAD, ou o seu igual FBG, medirá a inclinação, que o plano EABF tiver sobre o plano DABG. Ora notando-se que AB he a secção commua destes planos, e que EA,

e

e AD são cada huma perpendicular- EST. XI.
res á linha AB, se tirará facilmente
a regra seguinte.

Dados dous planos, que não são Medir a in-
clinação de
hum plano
sobre outro.
parallos, he preciso primeiramente
buscar a linha recta da sua secção
commua; depois de qualquer pon-
to desta linha se lhe tirem duas per-
pendiculares, que cada huma esteja
em hum destes planos; e o angulo,
que ellas entre si formarem, medirá
o angulo, que os dous planos dados
fizerem entre si.

XIII.

Como facilmente se percebe que
em quanto ABFE faz o seu movi-
mento á roda da dobra AB, a re-
cta AE, cuja extremidade E descre-
ve hum arco de circulo ED, nunca
sahe do plano EAHD, perpendicu-
lar ao plano X; e que a inclinação
de huma recta, qualquer, EA sobre
o plano X, não he outra cousa senão
o angulo EAD, tambem muito fa- Medir a in-
clinação,
que huma
cil-

EST. XI.
linha tem,
sobre hum
plano.

cilmente se descobre, que a inclinação de huma recta, qualquer, EA sobre o plano X, se mede pelo angulo EAH feito entre esta linha, e a linha AD, que passa por A, e pelo ponto H do plano X, onde cahe a perpendicular EH, abaixada sobre este plano, de qualquer ponto E da recta AE.

XIV.

A inspecção sómente da figura, de que nos servimos no Artigo precedente, faz lembrar hum novo modo de abaixar de hum ponto E, (Figura 9.) fóra do plano X, huma linha EH, perpendicular a este plano.

Nova maneira de abaixar huma linha perpendicular a hum plano dado.

Tendo-se tirado no plano X huma linha qualquer que seja BAS, se abaixará do ponto dado E a perpendicular EA a esta linha. Isto feito, do ponto A, onde esta linha perpendicular cahe, se levantará no plano X a recta AD, perpendicular a AB; e abaixando depois do ponto dado E, so-

sobre a recta AD a perpendicular EST. XI.
EH, esta linha será a perpendicular ao
plano X.

XV.

Daqui se tira outro modo de levantar sobre hum plano X huma perpendicular MN, de hum ponto M dado sobre este plano.

Segunda maneira de levantar huma linha perpendicular a hum plano dado.

Tendo-se abaixado de qualquer ponto E, tomado fóra do plano X, (Fig. 9.) a perpendicular EH, a este plano, se tirará pelo ponto dado M a recta MN, que seja parallela a HE, e esta será a perpendicular ao plano X.

XVI.

Depois do parallelepipedo, o sólido mais simples he o prisma recto, que he huma figura ABCDEFGHIKLM, (Figura 10.) cujas duas bases oppostas, e parallelas são dous polygonos iguaes, de tal sorte situados, que os lados GF, FE, &c.

O prisma recto he huma figura sólida, que tem por bases dous polygonos iguaes, e as outras faces são rectangulares.

de

EST. XI. de hum são parallelos aos lados BC, CD, &c. do outro, e cujas faces são os rectangulos ABGH, BGFC, &c.

XVII.

Formação
dos prismas
rectos.

Os Geometras suppõem estas figuras formadas, assim como os paralelepipedos, por huma base ABCD-LM, que se move parallelamente a si mesma, de forte que os seus angulos A, B, &c. seguem as linhas perpendiculares ao plano da sua base.

XVIII.

Para distincção das differentes especies de prismas rectos, se lhes ajunta o nome do polygono, que lhes serve de base. Por exemplo, o prisma exagonal he aquelle, que tem por base hum exagono.

XIX.

Dous prismas, que tem as suas

Para se achar o modo de medir toda a sorte de prismas rectos, se ob-

observe primeiramente, que de dous prismas rectos, cujas bases forem iguaes, aquelle, que tiver maior altura, será maior em solidez, na mesma razão que a sua altura for maior.

EST. XI.
bases iguaes,
estam na
mesma razão
das suas al-
turas.

XX.

Note-se depois, que dous prismas rectos, que tiverem a mesma altura, porém que hum tenha huma base, que contenha hum certo numero de vezes a base do outro, estarão entre si na mesma razão das suas bases. A verdade desta proposição facilmente se percebe, reflectindo-se na formação dos prismas explicada no Artigo XVII.

Dous prismas, que tem a mesma altura, estão na mesma razão das suas bases.

Sejam *abcdefghiklm*, (Fig. 10. e 11.) *ABCDEFGHIKLM* dous prismas, que tem a mesma altura, e que a base *abcdlm* do mais pequeno seja, por exemplo, hum quarto da base *ABCDLM*. Como os dous prismas são produzidos pelos

mo-

EST. XI. movimentos das suas bases, segue-se que hum plano, qualquer que seja, que ser paralelo ao plano, em que estam as duas bases, cortará nos dous prismas dous polygonos, cada hum dos quaes será igual á base do prisma, donde for cortado; isto he, que a secção do maior prisma será sempre quadrupla da do menor. Logo o prisma ABCDEFGHIKLM se poderá considerar como composto de porções todas quadruplas das do prisma *abcdefghiklm*, e por consequencia a solidez do primeiro prisma será quadrupla da do segundo.

XXI.

Depois destas duas observações, não será difficil o formar a regra seguinte para se medirem todos os prismas rectos.

A medida do prisma recto he o producto da sua base pela sua altura.

Primeiramente se medirá por palmos quadrados, ou por pollegadas quadradas, &c. a área da base do prisma proposto; depois se multipli-

ca-

cará o numero, que se tiver achado, EST. XI.
pelo numero de palmos, ou de pollegadas, &c. que contiver a altura do prisma, e o seu producto dará o numero de palmos, ou de pollegadas cubicas, &c. que o prisma proposto contiver, e este numero será por consequencia a sua medida.

XXII.

Tambem se dá o nome de prisma aos sólidos, (Fig. 13.) que tem duas bases polygonas iguaes, como as precedentes, e cujas faces são parallelogramos, em lugar de serem rectangulos. Estes novos prismas para se distinguirem daquelles, de que fallamos, se chamam prismas obliquos, em contraposição aos outros, que se chamáram primas rectos.

Os prismas obliquos differem dos prismas rectos, em que as faces destes são compostas de rectangulos, e as daquelles de parallelogramos.

XXIII.

Entende-se por prismas obliquos aquelles, que são formados por huma base *abckl*, que se move parallel-

Formação dos prismas obliquos.

EST. XI. rallelamente a si mesma ; e de tal forte , que os seus angulos seguem as linhas parallelas ag , bh , cd , &c. que se elevam fóra do plano da base , mas que lhe não são perpendiculares.

XXIV.

A analogia , que ha entre a formação deste prisma , e a dos prismas rectos , dos quaes temos fallado , (Art. XVII.) nos dá facilmente a medida da solidez dos prismas obliquos ; porque se imaginarmos que ao pé de hum prisma obliquo $abcd$ $efghik$ (Fig. 12. e 13.) esteja hum prisma recto $ABCDEFGHIK$, que tenha a mesma base , e que estes dous prismas estejam comprehendidos entre duas parallelas , se verá que a solidez destes dous corpos será absolutamente a mesma.

Porque se por hum ponto , qualquer que seja P da altura , se fizer passar hum plano paralelo á base ,

as

as secções $NOQR$, $nopqr$, que EST. XI. este plano formar em cada hum destes dous prismas, se poderão considerar, como se as bases iguaes $ABCKI$, $abcki$ chegasssem a $NOQR$, $nopqr$, pelo movimento que fizesssem estes dous prismas; e assim estas duas secções seriam polygonos iguaes.

Ora se todos os córtes imaginaveis, que nestes dous prismas se podem formar, cortados pelos mesmos planos, são iguaes, segue-se que a somma destas porções, isto he, dos prismas, he igual tambem.

Exprime-se ordinariamente esta proposição deste modo: Os prismas obliquos são iguaes aos prismas rectos, quando elles tem as mesmas bases, e as mesmas alturas. A altura do prisma he a perpendicular baixada do plano superior sobre o inferior, ou sobre o seu prolongamento.

Os prismas obliquos são iguaes aos prismas rectos, quando elles tem as mesmas bases, e as mesmas alturas.

XXV.

- EST. XI.** Como os parallelepipedos devem entrar no numero dos prismas, o que acabamos de dizer ácerca dos prismas se entenderá tambem dos parallelepipedos obliquos, isto he, das figuras $abcdefgh$, (Estampa XII. Fig. 1. e 2.) produzidas pelo movimento de hum quadrado, de hum rectangulo, e ainda de hum parallelogrammo, de sorte que os seus quatro angulos figam as linhas parallelas, que se elevam obliquamente da sua base. Assim o parallelepipedo obliquo $abcdefgh$ será igual ao parallelepipedo recto $ABCDEF-GH$, se a base $abgh$ for a mesma, ou tiver a mesma superficie, que tiver a base $ABGH$; e se a perpendicular abaixada do plano $d c f e$ sobre o plano $abgh$ for igual á perpendicular abaixada do plano $DCFE$ sobre o plano $ABGH$.

O mesmo he dos parallelepipedos obliquos, a respeito dos parallelepipedos rectos.

EST. XII.

Ten-

XXVI.

Tendo-se visto o que respeita aos **EST. XII.** parallelepipedos, e aos prismas, examinemos agora as pyramides, isto he, os corpos taes, como ABCD-EFG, (Fig. 3.) comprehendidos em hum certo numero de triangulos, que partindo todos do mesmo vertice A, se terminam em huma base polygona, qualquer que seja BC-DEFG. He necessario considerar esta sorte de sólidos não sómente pelos haver nos edificios, e em outras obras, que ha para construir, mas tambem porque todos os sólidos terminados por planos, são ajuntamentos de pyramides, assim como as figuras rectilneas são ajuntamentos de triangulos. Para nos certificarmos disto, não he preciso mais do que tirar linhas de hum ponto tomado á vontade, no interior do corpo proposto, a todos os angulos delle.

XXVII.

EST. XII. Distinguem-se tambem as pyramides humas das outras, assim como os prismas, pelo nome da figura, que lhes serve de base.

XXVIII.

Quando a pyramide tem por base huma figura regular, e que o seu vertice corresponde perpendicularmente ao centro H da sua base, como na Figura 3. chama-se então pyramide recta; e ao contrario se chama pyramide obliqua, quando o seu vertice não está perpendicularmente por cima do seu centro, como na Figura 5.

XXIX.

Para descobrir a maneira de se medir toda a sorte de pyramides, tanto rectas, como obliquas, principia-remos, fazendo sobre estas figuras algumas reflexões geraes, que se nos
of-

offerecem pelo conhecimento das pro- EST. XII.
priedades dos prismas.

Quando se faz reflexão na igualdade dos prismas, que tem a mesma base, e a mesma altura, he natural o lembrar-nos, que os parallelogrammos são iguaes entre si, quando elles tem estas mesmas condições, e que o mesmo he tambem dos triangulos. Estas tres verdades apresentando-se de huma vez ao espirito, a analogia nos deve conduzir a crer, que as propriedades, que são commuas aos parallelogrammos, e aos triangulos, o podem tambem ser aos prismas, e ás pyramides; deve-se pois suspeitar que as pyramides, que tem a mesma base, e a mesma altura, tem tambem a mesma solidez.

XXX.

As reflexões seguintes confirmaráo o que suspeitamos.

Sejam $ABCDE$, $abcde$ (Fig. 4. e 5.) duas pyramides, cujas alturas

EST. XII. ras AH, *ab* sejam as mesmas, e as suas bases duas figuras iguaes BCDE, *b c d e*; imaginando pois que estas duas pyramides sejam cortadas por huma infinidade de planos parallellos ás suas bases, facilmente se comprehenderá que as porções cortadas destas duas pyramides darão os quadrados iguaes IKLM, *iklm*; e por consequencia, que as duas pyramides podem ser consideradas como ajuntamentos de hum mesmo numero de porções cortadas, que serão iguaes, cada huma á sua correspondente. Logo disto se deve concluir, que a somma das porções cortadas será igual de huma, e outra parte, isto he, que as duas pyramides serão iguaes em solidez.

Se as bases das duas pyramides fossem outros polygonos regulares, ou irregulares BCDEF, *b c d e f* (Fig. 6. e 7.) iguaes entre si, ninguem deixaria tambem de entender, que todas as porções cortadas IKLMN,

ik

iklmn de huma, e outra parte das EST. XII. duas pyramides, feriam iguaes entre si; e por consequencia concluir disto, que as pyramides teriam sempre a mesma solidez, quando ellas tivessem a mesma base, e a mesma altura.

XXXI.

Tudo isto he facil de imaginar, depois da demonstração, que démos da igualdade dos prismas, que tem a mesma altura; com tudo a semelhança, que ha entre qualquer córte IKLMN de huma pyramide, e a sua base BCDEF, e a igualdade dos córtes IKLMN, e *iklmn*, entra no numero daquellas proposições, que ainda que intelligiveis para todos, tem em rigor necessidade de huma demonstração. Ora para esta se achar, somos obrigados a entrar em varias considerações sobre a semelhança das figuras sólidas.

Tor-

EST. XII.

XXXII.

Tornemos á pyramide ABCD-EF, (Fig. 6. e 7.) e supponhamos que esta seja cortada por hum plano IKLMN, parallelo á sua base; vamos a demonstrar que a secção, ou córte formado por este plano na pyramide, he hum polygono perfectamente semelhante ao polygono BCDEF; e que a pyramide AIKLMN he em si mesma inteiramente semelhante á pyramide ABCDEF; isto he, que os angulos, que todas as linhas destas duas figuras formam, são respectivamente iguaes; e que todos os lados da pyramide pequena tem entre si a mesma razão, que tem os lados da grande.

Em que
consiste a
semelhança
de duas fi-
guras.

XXXIII.

Principiemos observando, que se dous planos X, e Y (Figura 8.) são parallelos, e que se duas linhas quaesquer ALD, AME, partindo de hum mesmo ponto A, atravessam

fam estes dous planos, as rectas LM, EST. XII. e DE, que encontram os pontos L, M, D, E, serão parallelas. A razão disto he, que se estas duas linhas não fossem parallelas, se contrariariam, sendo produzidas em alguma parte; mas se produzindo-as se encontrassem, os planos, em que ellas se acham, e donde não podem fahir, sendo tambem produzidos, quanto fosse necessario, da mesma forte se contrariariam. Logo elles não seriam parallelos, como se suppunha.

XXXIV.

Suppondo-se pois que o plano IKLMN (Fig. 6.) seja paralelo ao plano BCDEF, disto se seguirá que todas as linhas ML, LK, KI, IN, NM serão parallelas ás linhas ED, DC, CB, BF, FE; e por consequencia os triangulos ALM, AKL, AIK, &c. serão semelhantes aos triangulos ADE, ACD, ABC, &c. Tomando hum dos lados destes triangu-

EST. XII. guios , AM por exemplo , por medida commua , ou petipé de todos os lados da pyramide pequena , ao mesino tempo que o lado correspondente AE servir de medida aos lados da grande , facilmente se verá que os lados ML, LK, KI, &c. do polygono IKLMN serão proporcionaes aos lados ED, DC, CB, &c. do polygono BCDEF.

Tambem será facil o comprehender , que todos os angulos IKL, KLM, &c. serão respectivamente iguaes aos angulos BCD, CDE, pois que os primeiros serão formados por linhas parallelas aos lados dos segundos. Logo estes dous polygonos IKLMN, BCDEF serão semelhantes.

XXXV.

Ora sendo os lados AM, AL, AK, &c. proporcionaes aos lados AE, AD, AC, &c. e os angulos ALM, ALK, &c. respectivamente
 iguaes

iguacs aos angulos ADE, ADC, &c. EST. XII.
 por causa da semelhança dos trian-
 gulos ALM, ADE, ALK, ADC,
 &c. as duas pyramides AIKLMN,
 ABCDEF serão inteiramente seme-
 lhantes.

XXXVI.

Finalmente, se do ponto A se
 tirar AH, perpendicular ao plano,
 em que está construido o polygono
 BCDEF, e que Q seja o ponto, on-
 de se encontre esta perpendicular com
 o plano do polygono IKLMN, he
 evidente que as rectas AQ, AH,
 alturas das duas pyramides AIKLMN,
 ABCDEF, estarão entre si na
 mesma razão dos seus lados homo-
 logos AM, AE; AL, AD, &c. ou,
 o que vem a ser o mesmo, toman-
 do-se as alturas AQ, AH por peti-
 pés das duas pyramides, os lados
 AM, AL, &c. conterão tantas par-
 tes de AQ, quantas partes de AH
 contiverem os lados AE, AD, &c.
 Tor-

XXXVII.

EST. XII. Tornemos agora a considerar ao mesmo tempo as duas pyramides $ABCDEF$, (Fig. 6. e 7.) $abcdef$, e ver-se-ha que os dous córtes $IKLMN$, $iklmn$, sendo semelhantes ás bases $BCDEF$, $bcdef$, que são as mesmas, serão entre si semelhantes. Demais se verá, que estes dous córtes serão entre si iguaes, pois que os petipés destas duas figuras são as rectas iguaes AQ , aq , alturas das pyramides $AIKLMN$, $aiklmn$.

As pyramides, que tem a mesma base, e a mesma altura, são iguaes.

Logo, sem se saber qual he a solidez das pyramides, se sabe já com certeza, que se ellas tem a mesma altura, e a mesma base, são iguaes, como nós o tínhamos suspeitado. (Art. XXIX.)

XXXVIII.

Duas pyramides são também iguaes, se

Se as bases das duas pyramides em lugar de serem as mesmas, fossem sómente iguaes em superficie,

as

as pyramides serão também iguaes em solidez; porque sejam $abcdef$, e $arst$ (Fig. 7. e 9.) duas pyramides, que tenham a mesma altura ah ; cortando-se estas duas pyramides por qualquer plano paralelo á base, he evidente que haverá a mesma razão entre a área $iklmn$, e a área $bcdef$, que houver entre a área uxy , e a área rst ; pois que $iklmn$, $bcdef$, sendo (Art. XXXIV.) figuras semelhantes, não differem (Part. I. Artigo XLVIII.) senão pelos seus petipés aq , ah , &c. e as figuras uxy , rst , sendo também semelhantes, da mesma sorte não differem senão pelos seus petipés, que são também as linhas aq , ah .

Porém se as bases rst , $bcdef$ são iguaes em superficie, as suas partes proporcionaes uxy , $iklmn$ serão também iguaes. Logo todas as porções cortadas das duas pyramides $arst$, $abcdef$ terão a mesma extensão. Logo a somma dellas, isto he,

EST. XII.
tendo a mesma altura, as suas bases, sem que sejam polygonos semelhantes, são iguaes em superficie.

EST. XII. he, as mesmas pyramides, serão iguaes em folidez.

XXXIX.

As pyramides, que tem a mesma altura, estão entre si como as suas bases.

Se a base $bcdef$ da primeira pyramide contivesse a base rst hum certo numero de vezes, a folidez da primeira pyramide $abcdef$ conteria o mesmo numero de vezes a folidez da segunda $arst$.

Porque neste caso a base $bcdef$, sendo dividida em varias partes, cada huma das quaes fosse igual á base rst , se poderia conceber ser a pyramide $abcdef$ composta de varias outras pyramides, que tivessem por bases as partes de $bcdef$. Ora cada huma destas novas pyramides seria igual á segunda pyramide $arst$, segundo o provámos no Artigo precedente. Logo, &c.

Que se a base rst não fosse exactamente contida na base $bcdef$, mas sim estas duas bases tivessem huma medida commua X , se dividi-

diria cada huma das duas bases bc EST. XII, def , rst em partes iguaes X, e se veria que as duas pyramides $abcd$ ef , $arst$ seriam compostas de tantas novas pyramides, todas entre si iguaes, quantas as duas bases contivessem de partes X. Logo as pyramides $abcdef$, $arst$ seriam entre si como as suas bases.

E se as bases fossem incommensuraveis, se mostraria sempre que não obstante isto, as pyramides estariam entre si na mesma razão das suas bases, servindo-nos de huma inducção semelhante áquella, de que usámos em caso semelhante, (Part. II. Art. XXVIII.) quando se tratou de comparar as figuras, cujos lados eram incommensuraveis; isto he, que se diminuiria ao infinito a medida X, de modo que ella pudesse ser julgada por medida commua, tanto da base rst , como da base $bcdef$.

Ten-

XL.

EST. XII.

Tendo-se descoberto que as pyramides, que tem a mesma altura, estão na mesma razão das suas bases, se deve reconhecer que a medida da solidez dellas inclue em si pouquissima difficuldade.

Porque não se trata mais do que de saber medir huma só pyramide para se saberem medir todas as mais. Supponhamos, por exemplo, que sabemos medir a pyramide ABCDE, (Fig. 10. e 11.) e que se nos pede a medida da pyramide ASTVXY, que não tem a mesma altura, nem a mesma base da primeira: principiaremos, fazendo huma pyramide semelhante á pyramide ABCDE, e que tenha a altura da pyramide ASTVXY, o que será muito facil; porque bastará (Art. XXXV.) prolongarem-se os lados AB, AC, AD, AE, e cortallos pelo plano LMNO, cuja distancia AG do vertice A seja igual á altura AO.

Isto

Isto feito , pois que por suppo- EST. XII.
 sição sabemos medir a pyramide AB-
 CDE , he evidente que tambem sa-
 beremos medir a pyramide ALM-
 NO , que lhe he semelhante ; porque
 quaesquer que sejam as operações,
 pelas quaes se medir a pyramide
 ABCDE , as mesmas se poderão sem-
 pre fazer para se medir a pyramide
 semelhante ALMNO , excepto que
 nesta se usará de hum petipé diferente:

Supponhamos pois que a pyra-
 mide ALMNO esteja medida ; a sua
 medida determinará tambem a da
 pyramide proposta ASTVXY , por-
 que pelo Artigo precedente estas duas
 pyramides estam entre si como as
 suas bases LMNO , STVXY ; e de-
 mais nós ensinámos na segunda Par-
 te a achar a razão , que ha entre estas
 duas bases.

XLI.

Pois que não se trata senão de
 medir huma só pyramide para sa-
 ber

EST. XII. ber medir todas as que se podem imaginar, proponhamo-nos huma dellas extremamente simples, que se póde formar, tirando dos quatro angulos A, B, C, H (Fig. 12.) de huma das faces de hum cubo $ABCDEFGH$ quatro linhas ao ponto O , centro deste cubo; isto he, ao ponto igualmente distante de A, D, B, E , &c.

Facilmente se comprehende que esta pyramide he a sexta parte do cubo, pois que este se póde desfazer em seis pyramides iguaes, tomando cada face por base. Ora o valor do cubo he o producto da altura AF pela base $ABCH$. Logo para se ter o valor da pyramide, he necessario repartir o producto de AF por $ABCH$ em seis partes iguaes; ou, que he o mesmo, será preciso multiplicar a sexta parte da altura AF pela base $ABCH$; e como a sexta parte da altura AF he o terço da altura OL da pyramide $OABCH$, pois que a sua altura OL he a me-
ta-

tade do lado do cubo, segue-se que EST. XII.
 a medida da pyramide $OABCH$ he
 o producto do terço da sua altura
 pela sua base.

XLII.

Agora supponhamos que haja pa-
 ra medir huma pyramide, qualquer
 que ella seja, $OKMNSTV$; (Figu-
 ra 13.) imaginemos hum cubo, cu-
 jo lado AB , (Figura 12. e 13.) ou
 AF , tenha dobrada altura de OL
 da pyramide proposta; e imagine-se
 neste cubo huma pyramide $OABCH$,
 a ponta da qual esteja no centro, e
 que tenha por base huma das faces
 $ABCH$ do cubo. Esta nova pyrami-
 de terá a mesma altura da primeira;
 e por consequencia (Art. XXXIX.)
 a solidez de $OABCH$ será para a
 de $OKMNSTV$, como a base $AB-$
 CH para a base $KMNSTV$. Ora
 pelo Artigo precedente o producto
 do terço da altura commua OL pe-
 la base $ABCH$ he o valor da pyra-

EST. XII. mide OABCH. Logo o producto do terço da mesma altura commua OL pela base KMNSTV, será o valor da pyramide proposta OKMNSTV.

A solidez de qualquer pyramide, he o producto da sua base pelo terço da sua altura.

E com isto se descobre este theorema geral, que huma pyramide tem por medida o producto da sua base pelo terço da sua altura.

XLIII.

Como temos visto (Art. XXI.) que a solidez de hum prisma he o producto da sua base pela sua altura, claro está pelo Artigo precedente que as pyramides serão sempre a terça parte dos prismas, que tiverem a mesma base, e a mesma altura.

A pyramide he o terço do prisma, que tem a mesma base, e a mesma altura.

XLIV.

Depois de termos medido todos os sólidos terminados por planos, vamos agora a procurar o caminho, que se poderá ter seguido para se medirem os sólidos, que tem as suas
su-

superficies curvas. E como na terceira Parte não tratámos senão das figuras, cujos contornos não contém outras curvas, senão as do circulo, aqui tambem não examinaremos senão os corpos, cujas curvidades são circulares.

Teremos dous objectos no exame destes corpos, a medição das suas superficies, e a dos seus sólidos; porque sendo estas superficies ou inteiramente curvas, ou parte planas, e parte curvas, não podemos remetter-nos para a sua medição á primeira Parte, como fizemos para os corpos terminados por planos.

XLV.

O mais simples de todos os sólidos curvos he o cylindro; he este hum corpo como ABCDEF, (Estampa XIII. Fig. 1.) as duas bases do qual ABC, DEF são dous circulos iguaes, e parallellos unidos por humma superficie curva, que se póde

EST. XIII.
O cylindro he hum sólido terminado por duas bases oppostas, e parallelas, que são circulos iguaes,

ima-

EST. XIII. imaginar ser formada por hum plano curvado á roda das suas circumferencias.

Quando os dous circulos estam situados de modo, que o centro G do primeiro corresponde perpendicularmente sobre o centro H do segundo, o cylindro então se chama recto.

Distinguem-se em cylindro recto, e em cylindro obliquo.

Pelo contrario o cylindro se chama obliquo, quando a linha tirada pelos dous centros G, e H (Fig. 2.) he obliqua a respeito dos planos ABC, DEF.

XLVI.

Formação do cylindro.

A formação geometrica destes sólidos, analoga áquellas dos prismas, e dos parallelepipedos, dos quaes fallámos (Art. XVII.) consiste em fazer mover hum circulo parallelamente a si mesmo, de forte que todos os seus pontos descrevam linhas rectas parallelas, que se elevam fóra do plano deste circulo.

Pa-

XLVII.

O modo de medir a superficie EST. XIII.
de hum cylindro recto , o que he
muitas vezes necessario na pratica,
achar-se-ha na maneira seguinte.

Tendo-se repartido as duas cir-
cumferencias ABC, (Fig. 1.) DEF,
cada huma em igual numero de par-
tes , correspondendo os pontos de
divisão perpendicularmente huns por
cima dos outros, se tirem as linhas
rectas, que unão os angulos corres-
pondentes dos dous polygonos re-
gulares, que se formam por esta ope-
ração. He evidente que então se te-
rá hum prisma, cuja superficie será
composta de tantos rectangulos com-
prehendidos na superficie do cylin-
dro , quantos forem os lados com-
prehendidos em cada huma das cir-
cumferencias ABC, DEF. Ora ten-
do todos estes rectangulos cada hum
a sua altura igual a AD, a sua me-
dida total será o producto da altura
AD,

EST. XIII. AD, pela somma de todas as bases, isto he, pelo contorno do polygono comprehendido, ou inscripto no circulo DEF, ou ABC.

Mas como á medida que o numero de lados deste polygono for maior, o contorno do polygono se avizinhará cada vez mais a ser igual á circumferencia, e a superficie do prisma a ser igual á do cylindro, segue-se que imaginando-se ser infinito o numero dos lados do polygono, em nada differirá o prisma do cylindro. Logo a superficie curva do cylindro recto, he igual a hum rectangulo, cuja altura seria AD, e a sua base huma linha recta igual á circumferencia DEF.

Esta proposição póde servir para se saber, por exemplo, quanto seria preciso de seda para cubrir hum pilar cylindrico, ou para tapeçar o interior de huma Torre redonda.

A superficie curva de hum cylindro recto, he igual a hum rectangulo, que tem a mesma altura, e que a sua base he igual á circumferencia.

Quan-

XLVIII.

Quanto á superficie do cylindro EST. XIII. obliquo, não se póde esta medir da mesma maneira, porque em lugar de rectangulos se teriam parallelogramos de alturas diferentes. Sómente por methodos muito complicados, e muito difficeis se chegou a saber pouco mais, ou menos o valor desta superficie; e os problemas deste genero não competem a elementos.

XLIX.

A solidez dos cylindros, sejam rectos, ou obliquos, he cousa muito facil de achar; porque he evidente, que tudo o que temos dito dos prismas, será applicavel aos cylindros, figurando-se serem os cylindros como os ultimos dos prismas, que se lhes possam inscrever.

Affim os cylindros, que tiverem a mesma base, e a mesma altura, serão iguaes em solidez.

Os cylindros, que tem a mesma base, e a mesma altura, são iguaes em solidez.

E

L.

EST. XIII.

A medida de qualquer cylindro he o producto da sua base pela sua altura.

E a medida do cylindro, qualquer, consistirá no producto da sua base pela sua altura.

LI.

A pyramide cónica he o sólido curvo mais simples depois do cylindro; sendo huma figura como ABCDE, (Fig. 3. e 4.) cuja base he hum circulo, e cuja superficie he composta de huma infinidade de linhas rectas, que concorrem todas da circumferencia BCDE ao vertice A. Póde-se considerar este sólido como huma pyramide, que tem por base hum circulo.

A pyramide cónica he hum sólido, que tem por base hum circulo.

LII.

Distinguem-se em pyramide cónica recta, e em pyramide cónica obliqua.

Se a ponta, ou vertice A da pyramide cónica corresponde perpendicularmente por cima do centro O da sua base, como na Figura 3. a pyramide cónica se chama recta; e se

se o vertice corresponde a hum ponto differente do centro da base, como na Figura 4. se chama obliqua. EST. XIII.

LIII.

Para se medir a superficie de huma pyramide cónica recta ABCDE, (Fig. 3.) se deve esta imaginar, como se fosse a ultima das pyramides, que se lhe possa inscrever, isto he, que se dividirá a circumferencia da sua base BCDE, como se fez á circumferencia do cylindro em huma infinidade de pequenos lados; e tirando linhas de todos os angulos ao vertice A da pyramide cónica, se achará que a superficie da pyramide cónica he hum ajuntamento de huma infinidade de pequenos triangulos isosceles, a altura dos quaes he igual ao lado AB da pyramide cónica, sendo todas as bases dos mesmos triangulos tomadas juntamente, iguaes á circumferencia BCDE; do que he facil de ver, que

Mede-se a
superficie da

a me-

EST. XIII. pyramide cónica recta, multiplicando a metade do seu lado pela circumferencia da sua base.

a medida desta superficie se achará, multiplicando a metade de AB pela circumferencia $BCDE$.

LIV.

Se agora nos lembrarmos de que a superficie de hum sector deste circulo he (Part. III. Art. X.) igual ao producto do arco deste sector por a metade do seu radio, se verá que para cubrir a pyramide cónica recta $ABCDE$ com hum superficie flexivel, como papel grosso, &c. seria necessario tomar hum sector de circulo, o radio do qual fosse igual a AB , e o arco igual á circumferencia $BCDE$.

A superficie curva de hum pyramide cónica he hum sector de circulo.

LV.

Quando a pyramide cónica he obliqua, a medida da sua superficie, assim como a do cylindro obliquo, he muito difficil de se saber, ainda que não seja mais que por approxi-
ma-

mação, e tambem he hum problema EST. XIII. fóra dos limites dos Elementos.

LVI.

Quanto á solidez das pyramides cónicas, sejam ellas rectas, ou obliquas, serão consideradas como a ultima das pyramides polygonas, que se lhes possa inscrever, e por consequencia se lhes poderá applicar o que das pyramides se disse em geral.

Assim as pyramides cónicas, que tiverem a mesma base, e a mesma altura, serão iguaes.

As pyramides cónicas, que tem a mesma base, e a mesma altura, são iguaes.

LVII.

E a solidez de huma pyramide cónica, qualquer que seja, será o producto da sua base pelo terço da sua altura.

A sua medida he o producto da sua base pelo terço da sua altura.

LVIII.

He muitas vezes necessario medir hum corpo tal como BCDEF-GH,

EST. XIII. GH, (Fig. 5. e 6.) a que chamam pyramide cónica truncada, que he a parte, que fica de huma pyramide cónica AFGH, tendo-se-lhe cortado outra pyramide cónica mais pequena ABCDE por huma secção parallela á base FGH. He evidente que a medida deste sólido será a differença que houver entre as duas pyramides cónicas ABCDE, AFGH.

LIX.

Quanto á superficie de huma pyramide cónica truncada, se ella for formada pela secção de huma pyramide cónica recta, póde-se achar cousa, que seja mais simples do que he medirem-se separadamente as superficies das duas pyramides cónicas, e diminuir-se huma da outra, para o que se usará do methodo seguinte, que he facil de imaginar, depois do que dissemos no Artigo LIV.

Supponhamos que ALR (Fig. 6. e 7.) seja o sector, que seria neces-
sa-

fario se construisse para cubrir a pyramide cónica AFGH ; descrevendo pois do centro A, com o intervallo AM igual a AB, hum arco MP, claro está que o espaço MPRL será huma porção de coroa propria para com ella se cubrir a superficie procurada da pyramide cónica troncada. Ora imaginando-se que as duas circumferencias, das quaes MP, e LR são os seus arcos semelhantes, estejam completas, se terá huma coroa inteira, que terá por medida (Part. III. Art. VIII.) o producto de ML, igual a BF por huma circumferencia, da qual seja radio AN, supposto estar N no meio de ML. Logo a porção de coroa MPLR, ou a superficie da pyramide cónica troncada BCDEFGH, que lhe he igual, se medirá, multiplicando ML pelo arco NQ; ou, que vem a ser o mesmo, multiplicando BF pela circumferencia IKL, que nos dará a secção do sólido proposto

por

Mancira de medir a superficie de huma pyramide conica troncada.

EST. XIII. por hum plano parallelo á base , e que passa pelo meio I do lado BF.

LX.

A esfera he hum corpo, cuja superficie tem todos os seus pontos igualmente distantes do centro.

O ultimo dos corpos sólidos, de que trataremos, se chama Esfera, ou Globo, que he aquelle, cuja superficie tem todos os seus pontos igualmente distantes de hum mesmo ponto, que he o centro della. Ha muitas vezes necessidade de se medir esta superficie; querer-se-ha saber, por exemplo, quanto será preciso de ouro para se dourar huma bola, quantas planchas de chumbo se tomarão para cubrir huma cupula, &c.

LXI.

Seja X (Fig. 8.) a esfera, da qual se queira medir a superficie, he evidente que se póde considerar este sólido como produzido pela revolução de hum semicirculo AMB, (Fig. 8.) ao redor do seu diametro AB.

Sup:

Supponhamos primeiramente que EST. XIII. em lugar da semicircumferencia tenhamos hum polygono regular de hum infinito numero de pequenos lados; ou, se quizermos, de hum grandissimo numero de lados, e proponhamo-nos sómente de medir a superficie Z (Fig. 9.) formada pela revolução deste polygono. Depois será facil o passar da medição desta superficie á medição da superficie da esfera, assim como passamos da medição das figuras rectilneas á medição do eirculo.

LXII.

Para se medir a superficie do sólido Z, examinemos a pequena parte desta superficie, que hum só lado produz, qualquer, Mm do polygono inscripto, em quanto este faz huma revolução á roda do diametro AB. He evidente que o lado Mm (Estampa XIV. Fig. I.) descreve neste movimento huma superficie de pyramide

P có-

EST. XIV. cónica troncada V. Porque produzindo-se a recta Mm até que ella encontre em T o diametro, ou exoda revolução AB, se esta recta TMm gyrar ao mesmo tempo com o semicirculo AMB, descreverá visivelmente huma pyramide cónica recta, da qual será vertice T, e a base o circulo descripto pelo ponto m , de forte que a superficie V formada pelo movimento de Mm será huma porção da superficie desta pyramide cónica, comprehendida entre os planos dos circulos, que os pontos M, e m descrevem, fazendo o seu gyro. Mas como temos visto (Artigo LIX.), a superficie V he igual a hum rectangulo, de que Mm he a altura, e a base huma linha igual á circumferencia KLO descripta pelo ponto K, meio de Mm . Logo a superficie formada pela revolução do polygono he igual á somma de tantos rectangulos desta natureza, quantos lados este polygono tiver, taes como Mm .

Ora

Ora como todos os lados Mm , EST. XIV. alturas destes rectangulos, se supõem serem iguaes, se poderá considerar ser a superficie que se procura como hum rectangulo total, que terá a altura Mm , com huma base igual á somma de todas as circumferencias, taes como KL , isto he, descriptas pelo ponto do meio de cada pequeno lado.

Porém o polygono inscripto no semicirculo AMB , tendo hum grandissimo numero de lados, a pequenez da altura Mm , e a excessiva grandeza da base fariam que este rectangulo fosse inconstruível.

Para se remediar este inconveniente, he muito facil de idear o reduzir todos estes pequenos rectangulos em outros, que tenham sempre huma mesma altura, não imperceptivel como Mm , mas bastante grande, para que cada huma das bases venha a ser muito mais pequena; e mediante isto, a addição de

EST. XIV. todas as pequenas bases, não farão mais do que hum comprimento comparavel com a altura.

LXIII.

Vejamos pois se poderíamos mudar deste modo os nossos pequenos rectangulos. Supponhamos, por simplificar o problema, que os nossos rectangulos em lugar de terem por bases linhas iguaes ás circumferencias KL , (Fig. 1. e 2.) não tenham por bases senão os radios KI das mesmas circumferencias. Depois não nos será difficil de applicar aos rectangulos verdadeiros, o que tivermos achado nestes ultimos rectangulos suppostos.

Logo he necessario achar hum rectangulo, que tenha por medida o producto de Mm por KI , mas que tenha por altura huma linha incomparavelmente maior do que Mm , e que seja a mesma em qualquer parte que esteja este pequeno lado

Mm .

Mm . Façamos escolha, por exem- EST. XIV.
 plo, da recta CK , que he o apothema do polygono de que Mm he lado, e por consequencia he sempre a mesma a qualquer lado do polygono a que ella pertença. Devemos pois procurar huma linha, cujo producto por CK seja igual ao producto de KI por Mm ; isto he, (Part. II. Art. VII.) que he necessario achar a quarta proporeional ás tres linhas KC , KI , Mm . Ora nós sabemos que por meio dos triangulos semelhantes he que se acham as linhas proporeionaes nas figuras; he pois necessario formar triangulos semelhantes, cujos lados homologos sejam as linhas de que se trata; o que se fará, abaixando MR , perpendicular a mp . Então teremos os triangulos MmR , KIC , que serão semelhantes; porque cada hum delles será rectangulo, hum em R , e o outro em I ; e demais, elles terão os angulos mMR , IKC iguaes

EST. XIV. entre si , porque o primeiro juntamente com o angulo MmR , igual ao angulo MKI , faz hum angulo recto; e o segundo IKC faz tambem hum angulo recto juntamente com MKI .

Do que facilmente se póde concluir , que KC he para KI , como Mm he para MR ; isto he , que MR he a quarta proporcional procurada; ou , que vem a ser o mesmo , que o rectangulo de KC por MR , ou por Pp , he igual ao rectangulo de Mm por KI .

Porém como o rectangulo , que pertendiamos mudar , não he aquelle de Mm por KI , mas sim o de Mm pela circumferencia , da qual he radio KI , aqui nos lembraremos que as circumferencias são entre si , como o são os seus radios; e que por consequencia , sendo iguaes os rectangulos de Mm por KI , e o de Pp por CK , o devem ser tambem os rectangulos de Mm pela circumferencia

cia

cia de KI , e o de Pp pela circumfe- EST. XIV.
 rencia de CK ; porque facilmente se
 vê, que se dous rectangulos são
 iguaes, e conservando-lhes as suas
 alturas se lhes augmentam propor-
 cionalmente as suas bases, estes re-
 ctangulos ficarão sempre iguaes.

LXIV.

Tendo-se demonstrado nos dous
 Artigos precedentes, que todas as
 pequenas superficies cónicas tronca-
 das, taes como V (Fig. 1. e 2.) são
 iguaes a outros tantos rectangulos,
 que tiverem todos por altura huma
 mesma recta igual á circumferencia,
 da qual seja radio KC ; e cada hum
 dos quaes tenha por base huma pe-
 quena recta Pp correspondente a
 cada lado Mm , se póde disto dedu-
 zir, que huma somma, qualquer,
 destas pequenas superficies tomada
 desde A até p , por exemplo, será
 igual a hum rectangulo, que tiver
 por

EST. XIV. por altura huma recta igual á circumferencia de CK, e por base a somma de todas as linhas taes, como P p , tomadas desde A até p , isto he, a recta A p .

Logo para se ter a superficie total produzida pela revolução do polygono inteiro, será preciso fazer hum rectangulo, a base do qual seja igual á circumferencia descripta pelo radio CK, e que tenha huma altura igual ao diametro AB.

LXV.

Agora he muito facil de medir a superficie da esfera; porque he certo que quantos mais lados tiver o polygono, tanto mais o sólido formado pela sua revolução se avizinhará a ser igual á esfera, e tambem o apothema CK se appropinquará mais a ser igual ao radio, de sorte que podendo-se imaginar que o polygono se tenha reduzido a cir-

A superficie da esfera tem por medida o producto do seu diametro.

culo, o apothema CK será o mesmo radio, e a superficie da esfera terá a mesma extensão, que tiver hum rectangulo, cuja altura será o diametro, e a base huma linha igual á circumferencia do circulo, de donde se formou, que ordinariamente se chama o circulo maximo da esfera.

EST. XIV.
pela circumferencia do seu circulo maximo.

LXVI.

Quanto á superficie curva de hum segmento de esfera AMLNO; (Fig. 3.) isto he, da parte de esfera, que della se diminue, quando se cõrta por hum plano MLNO, perpendicular ao diametro, esta tem por medida o producto da sua grossura, ou flexa AP pela circumferencia do circulo maximo AMBN. A razão disto he a mesma, com a qual se provou (Art. LXIV.) que a somma das superficies de todas as pequenas pyramides cónicas troncadas, comprehendidas desde A até *m*, (Fig. 2.) he igual ao rectangulo, cuja altura he

Que cousa seja hum segmento de esfera.

Como se mede a sua superficie.

EST. XIV. he A p , e a base huma linha igual á circumferencia, de que he radio CK.

LXVII.

A precedente medição da superficie da esfera nos ensina, que fazendo-se dar huma volta ao rectangulo ABDE, (Fig. 4.) e ao mesmo tempo ao semicirculo AMNB á roda de AB, a superficie curva do cylindro recto EFGIKDH formada pela revolução deste rectangulo, será igual áquella da esfera descripta pelo semicirculo; o que ordinariamente se exprime deste modo; a superficie da esfera he igual á do cylindro circumscripto.

A superficie da esfera he igual á do cylindro circumscripto.

LXVIII.

Os segmentos cortados do cylindro, e da esfera, tem a mesma superficie.

Se se cortassem tanto o cylindro, como a esfera por dous planos, quaesquer que sejam, perpendiculares ao diametro AB em P, e em Q, as porções cortadas da esfera, e do

do cylindro, nascidas do movimento da recta OS, e do arco MN, fariam iguaes em superficie. EST. XIV.

LXIX.

Tambem do que fica dito se vê que a superficie da esfera he igual á área do seu circulo maximo quatro vezes; porque a superficie deste circulo maximo tem por medida o producto de a metade do radio, ou do quarto do diametro pela circumferencia, e a superficie da esfera he igual ao producto do diametro todo pela mesma circumferencia.

A superficie da esfera he igual a quatro vezes aquella do seu circulo maximo.

LXX.

Tendo-se achado a medida da superficie da esfera, he muito facil o medir a sua solidez; porque pôde-se considerar a esfera como hum ajuntamento de huma infinidade de pequenas pyramides, os vertices das quaes estejam no centro della, e as

suas

EST. XIV. suas bases cubram toda a superficie. Ora cada huma destas pyramides tendo por medida o producto do terço da sua altura, isto he do radio, pela sua base, a somma total dellas, ou a solidez da esfera, se medirá, multiplicando o terço do radio pela sua superficie, isto he por quatro vezes a área do circulo maximo.

A solidez da esfera he o producto do terço do seu radio por quatro vezes a área do circulo maximo.

LXXI.

Como o producto do terço do radio, por quatro vezes o circulo maximo, he a mesma cousa que o producto de quatro vezes o terço do radio, isto he dos dous terços do diametro pelo maximo circulo, e que a solidez do cylindro EFGIKDH tem por medida o producto do diametro pelo mesmo circulo maximo, que lhe serve de base, segue-se que a solidez da esfera he os dous terços daquella do cylindro circumscripto.

A solidez da esfera he os dous terços da do cylindro circumscripto.

LXXII.

EST. XIV.

Se nos propuzermos o medir a solidez de hum segmento de esfera *AMLNO*, (Fig. 3.) he evidente que seria preciso medir primeiramente a porção da esfera formada pela revolução do sector *CAM*; o que se faria, multiplicando o terço do radio pela superficie do segmento de esfera proposto *AMLNO*: depois se diminuiria desta medida aquella da pyramide cónica formada pela revolução do triangulo *CPM*, isto he, a pyramide cónica, que tem por base o circulo *MLNO*, e *CP* por altura, e o resto seria o valor pedido do segmento.

Medida da solidez de hum segmento de esfera.

LXXIII.

Daremos fim a estes Elementos com algumas Proposições sobre a solidez, e a superficie dos corpos semelhantes. Estas Proposições se apresentam naturalmente, fazendo-se re-

fle-

EST. XIV. flexão sobre o que constitue a semelhança de dous corpos. Até se póde dizer, que se não póde absolutamente deixar de as descubrir por analogia, se nos lembrarmos do que dissemos (Part. I. Art. XXXIV. e seguint.) da semelhança das figuras planas, isto he daquellas, que são descriptas sobre planos.

No Artigo XXXII. temos determinado em que consiste a semelhança de duas pyramides; a definição, que então démos das pyramides semelhantes, se póde estender a todos os corpos terminados por planos, isto he, que dous corpos desta natureza se chamam semelhantes, se todos os angulos formados pelos lados do primeiro são os mesmos, que são os angulos formados pelos lados do segundo, e se os lados de hum destes corpos são proporcionaes aos lados homologos do outro.

Em que
consiste a se-
melhança de
dous corpos
terminados
por planos.

Quan-

LXXIV.

Quanto aos corpos, que não são terminados em todas as suas partes por planos, por exemplo, os cylindros, e as pyramides cónicas, também he facil de determinar as condições necessarias para serem semelhantes.

Dous cylindros rectos serão semelhantes, se as suas alturas estiverem na mesma razão dos radios das suas bases.

EST. XIV.
Condições, que determinam a semelhança de dous cylindros rectos.

LXXV.

Se os cylindros forem obliquos, será de mais necessario que as linhas, que se unem aos centros dos dous circulos em cada hum destes cylindros, façam os mesmos angulos sobre os planos das suas bases.

A de dous cylindros obliquos.

LXXVI.

As mesmas definições se podem applicar ás pyramides cónicas, quando

A de duas pyramides cónicas.

EST. XIV. do em lugar das linhas, que passam pelos centros das duas bases do cylindro, aquella, que vai do vertice da pyramide cónica ao centro do circulo, que lhe serve de base.

LXXVII.

Para que duas pyramides cónicas truncadas sejam semelhantes, he preciso em primeiro lugar que as pyramides cónicas, de que ellas são porções, sejam huma a outra semelhantes; e em segundo lugar, que as suas alturas estejam entre si como os radios das suas bases.

A de duas
pyramides
cónicas
truncadas.

LXXVIII.

As esferas,
os cubos, e
todas as fi-
guras, que
não depen-
dem senão
de huma só
linha, são
todas seme-
lhantes.

A respeito das esferas, muito bem se vê que ellas são todas semelhantes humas ás outras, como também o são todas as figuras, sejam sólidos, ou sejam planos, que não necessitam mais do que huma só linha para serem determinadas, como o circulo, o quadrado, o triangulo equi-

êquilatero, o cubo, o cylindro circumscripto á esfera, &c. EST. VIV.

LXXIX.

Em geral se poderá dizer das figuras sólidas semelhantes, como se disse das figuras planas, que ellas não differem senão pelos petipés, por onde são construidas.

Em geral os solidos semelhantes não differem senão pelos petipés, por onde são construidos.

Isto sómente que se tem exposto, bem considerado, conduz a duas proposições fundamentaes sobre a superficie, e sobre a solidez dos corpos semelhantes.

LXXX.

A primeira proposição ensina, que as superficies de dous corpos semelhantes são entre si como os quadrados dos seus lados homologos; que ha, por exemplo, a mesma razão entre as superficies das duas pyramides semelhantes α , e Z , (Fig. 5. e 6.) como entre os quadrados $abcd$, $ABCD$, feitos sobre os lados

As superficies dos solidos semelhantes são entre si, como os quadrados dos seus lados homologos.

Q ab ,

EST. XIV. ab , AB , que se correspondem nestas duas pyramides.

Para se demonstrar esta proposição, não se necessita mais do que dos discursos, que fizemos na I. Parte Art. XLIII. e XLIV. isto he, que basta sómente considerar que se P he o petipé da pyramide Z , e p o petipé da pyramide semelhante z , as linhas, de que se usar para se medir a superficie Z , e a do quadrado $ABCD$, terão o mesmo numero de P , como haverá de partes p naquellas, de que se usar para medir a superficie z , e a do quadrado $abcd$.

Porque disto se segue, que o producto das linhas, que entrarem na medida de Z , e de $ABCD$, dará o mesmo numero de quadrados X feitos por P , como o producto das linhas, de que se usar para medir z ; e $abcd$, dará de quadrados x feitos por p . Isto he, que os numeros, que exprimirem a proporção da superficie da pyramide Z para o quadrado

drado ABCD, serão os mesmos que EST. XIV.
os que exprimirão a proporção da
superfície z para o quadrado $abcd$.

O mesmo discurso se faria na
comparação de todos os mais corpos
semelhantes, seja que estes corpos
fossem terminados por planos, ou
que elles fossem terminados por su-
perfícies curvas; porque as linhas,
que servissem para se medirem as
superfícies de todos estes corpos, te-
riam sempre o mesmo numero de
partes dos seus petipés, e por con-
sequencia os productos destas linhas
conterião hum mesmo numero de ve-
zes os quadrados destas mesmas par-
tes.

E se as linhas necessarias para
se medirem as superfícies dos cor-
pos semelhantes fossem incommensu-
raveis, he evidente que a demonst-
ração sempre subsistiria, com tanto
que nisto se usasse dos principios,
de que nos servimos (Part. II. Art.
XXVIII.) para comparar as figuras

EST. XIV. semelhantes, cujos lados erão incommensuraveis.

LXXXI.

As superficies das esferas são entre si, como os quadrados dos radios dellas.

Da mesma forte se provaria que as superficies das esferas são entre si, como são os quadrados dos radios dellas. Porém para de outro modo o vermos mais claramente, bastará lembrar-nos que as superficies dos circulos são entre si, como os quadrados dos seus radios, (Part. III. Art. VI.) e que as superficies das esferas são quadruplas dos seus circulos maximos. (Art. LXIX.)

LXXXII.

A proporcionalidade entre as superficies dos corpos semelhantes, e os quadrados dos seus lados homologos, he tão geral, que ella se applica tanto aos corpos, que se sabem medir, como áquelles, cuja medição ainda não he conhecida.

Sem se saber medir, por exemplo,

plo, a superficie de hum cylindro obliquo, se póde affirmar que as superficies de dous cylindros obliquos semelhantes são entre si, como os quadrados dos diametros das bases destes cylindros. Porque inscrevendo nestes dous cylindros dous prismas semelhantes de quantas faces se quizer, se verá pelo que fica dito, que as superficies destes prismas estão entre si, como os quadrados dos diametros das bases. Logo os mesmos cylindros, considerados como os prismas inscriptos, terão as suas superficies na mesma razão. EST. XIV.

LXXXIII.

A proposição fundamental para a comparação da solidez dos corpos semelhantes he a seguinte.

Os sólidos semelhantes estão entre si, como os cubos dos seus lados homologos.

Póde-se demonstrar esta proposição

Os solidos semelhantes são entre si, como os cubos dos seus lados homologos.

EST. XIV. ção como a precedente, considerando que as figuras semelhantes não differem senão pelos petipés, por onde ellas se constroem.

Para o mostrar o mais simplesmente que nos he possível, nos serviremos, por exemplo, de dous prismas semelhantes Z , e z , (Fig. 7. e 8.) e de dous cubos X , e x , cujos lados são iguaes a AB , ab , linhas analogas nestes dous prismas; e demais tomaremos dous petipés AB , ab , divididos em hum grandissimo numero de partes, para se poderem medir as dimensões destes sólidos. Ora isto supposto, claro está que igualmente se acharão tantos cubos feitos pelas partes de ab no prisma z , e no cubo x , quantos se acharem feitos pelas partes de AB no prisma Z , e no cubo X .

Para todos os mais sólidos se faria o mesmo discurso; e aquelles, que tivessem dimensões incommensuraveis, estariam tambem na mesma

ma razão , em que estão os cubos EST. XIV.
dos seus lados homologos.

LXXXIV.

Os solidos das esferas , por exemplo , são evidentemente entre si , como os cubos dos radios dellas.

As esferas
são entre si ,
como os cu-
bos dos ra-
dios dellas.

F I M.



IN:



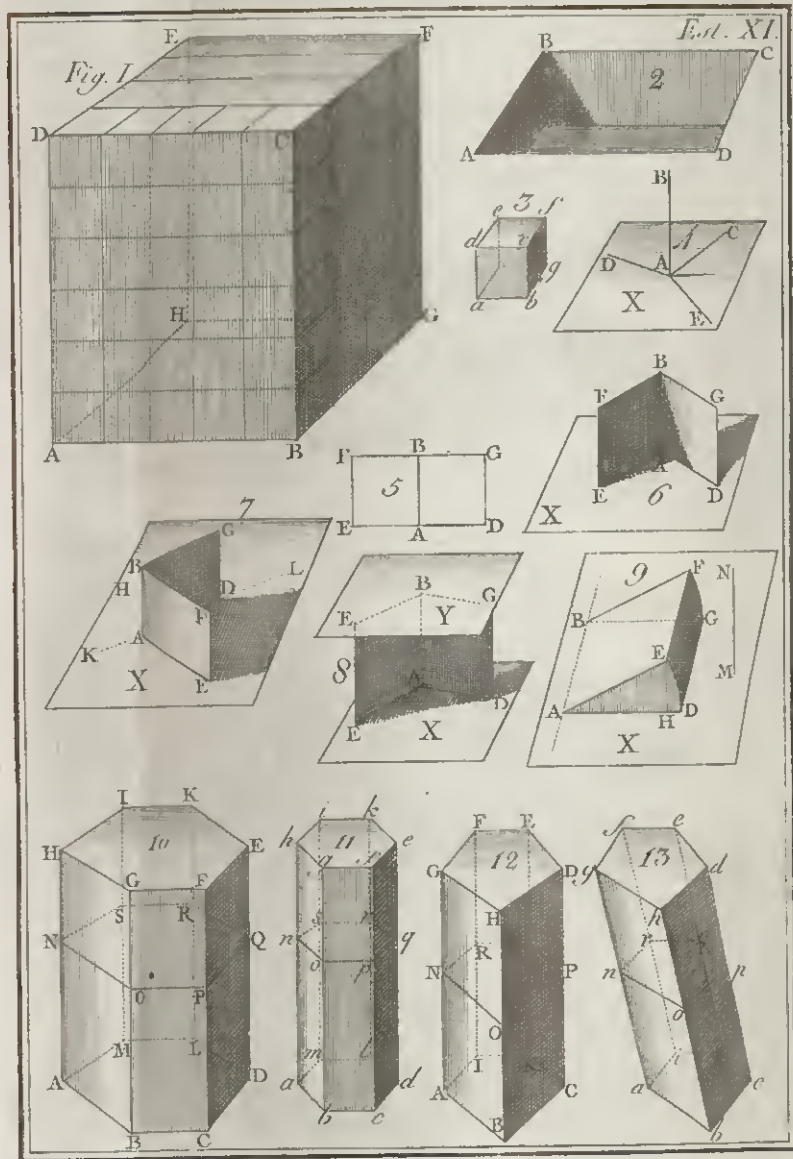




Fig. I.

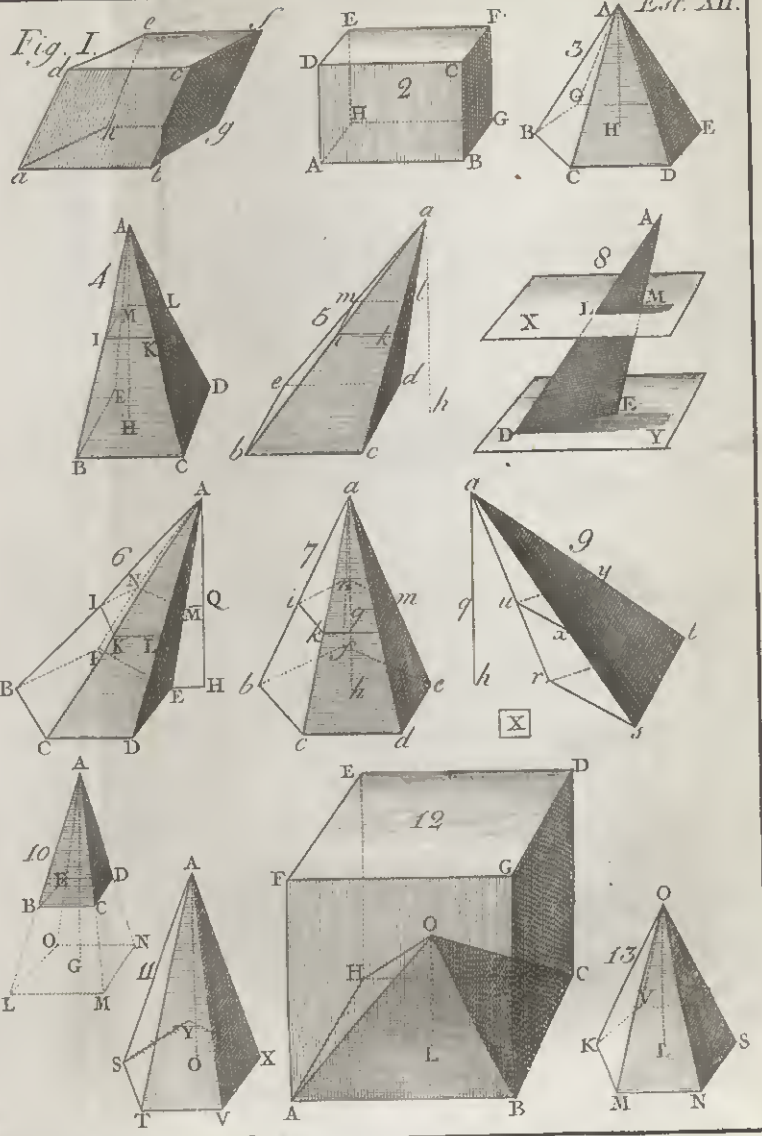
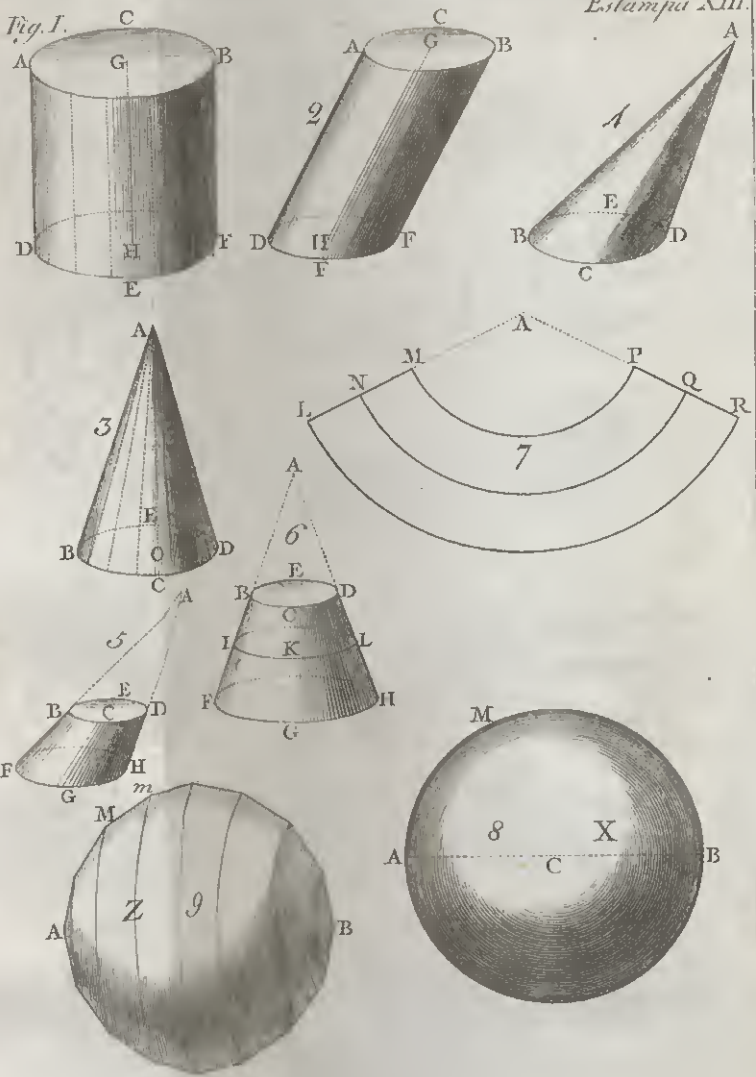


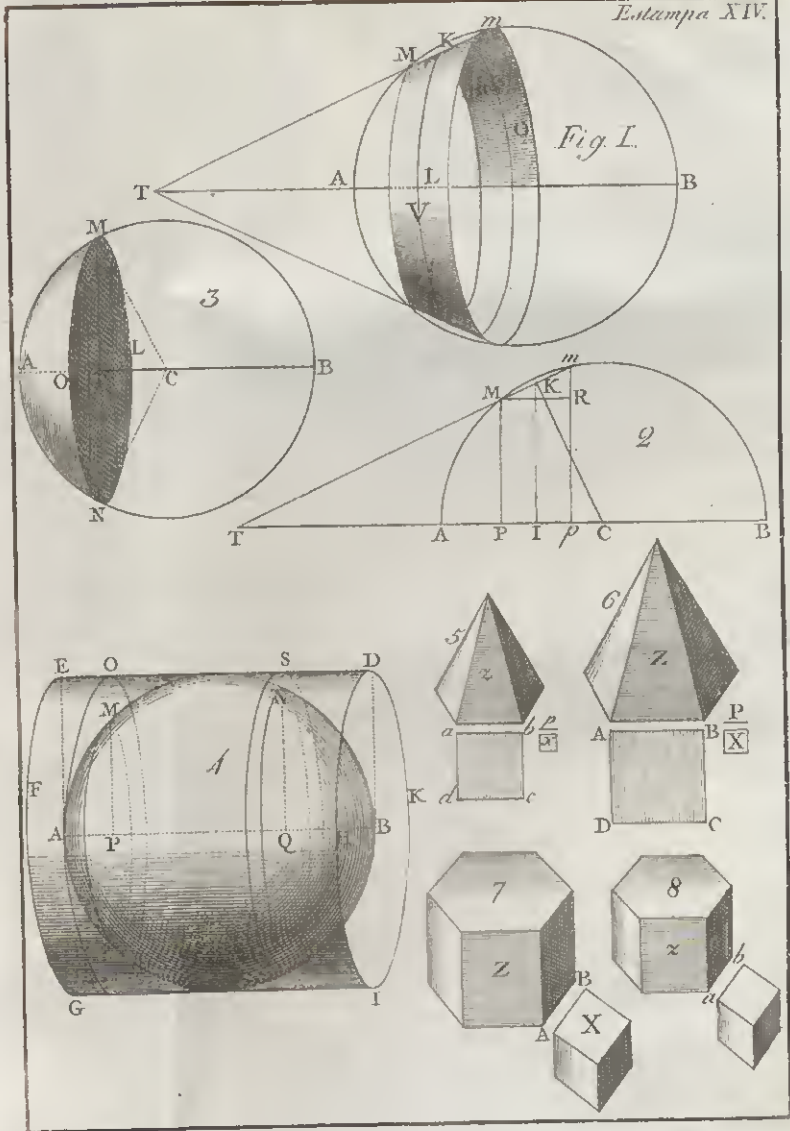


Fig. I.

Estampa XIII.











INDICE DAS MATERIAS.

PARTE PRIMEIRA

Dos meios, de que era mais natural
se usasse, para se chegar á me-
dição dos Terrenos.

II. *A* Linha recta he a mais curta
que ha de hum ponto a
outro, e por consequencia he a me-
dida da distancia entre dous pon-
tos. Pag. 2.

III. Huma linha, que cabe sobre ou-
tra, sem pender sobre ella para
alguma parte, he perpendicular a
esta linha. 3.

IV. O rectangulo he huma figura de
quatro lados perpendiculares huns
aos outros. 4.

O quadrado he hum rectangulo, que
tem

- tem os quatro lados iguaes. Ibid.*
- V. *Modo de levantar huma perpendicular. 5.*
- VI. *O circulo he o traço inteiro, que descreve a ponta movel de hum compasso, gyrando á roda da outra ponta. 7.*
- O centro he o lugar da ponta fixa. Ibid.*
- O radio he o intervallo das pontas do compasso. Ibid.*
- O diametro he o dobro do radio. Ibid.*
- VII. *Modo de abaixar huma perpendicular. 8.*
- VIII. *Cortar huma linha em duas partes iguaes. 9.*
- IX. *Construir hum quadrado sobre hum lado dado. Ibid.*
- X. *Fazer hum reſtângulo, do qual sejam dados o comprimento, e a largura. 10.*
- XI. *As parallelas são linhas sempre igualmente distantes humas das outras. Ibid.*
- Fi-*

- Tirar huma parallela a huma linha por hum ponto dado.* 11.
- XII. *A medida de hum reſtângulo he o produſto da ſua baſe pela ſua altura.* 13.
- XIII. *Figuras reſtilineas ſão aquellas, que ſe terminam em linhas reſtas.* 14.
O triangulo he huma figura terminada por tres linhas reſtas. 15.
- XIV. *A diagonal de hum reſtângulo he a linha, que o reparte em dous triangulos iguaes.* 16.
Triangulos reſtângulos ſão aquellos, que tem dous dos ſeus lados perpendiculares hum ao outro. Ibid.
Hum triangulo he a metade de hum reſtângulo, que tem a meſma baſe, e a meſma altura. 17.
Logo a ſua medida he a metade do produſto da ſua altura pela ſua baſe. Ibid.
- XV. *Os triangulos, que tem a meſma altura, e a meſma baſe, tem ſuperficies iguaes.* 18.
- XVII.

- XVII. Os triangulos, que tem a mesma base, e estam entre as mesmas parallelas, são iguaes em superficie. 20.
- XVIII. Os parallelogramos são figuras de quatro lados, da qual os dous oppostos são parallelos. 21.
Medem-se, multiplicando o producto da sua base pela sua altura. Ibid.
- XIX. Os parallelogramos, que tem huma base commua, e que estam entre as mesmas parallelas, são iguaes em superficie. Ibid.
- XX. Os polygonos regulares são figuras terminadas por lados iguaes, e igualmente inclinados huus sobre os outros. 22.
- XXI. Maneira de descrever hum polygono, de hum numero determinado de lados. 23.
O pentagono tem cinco lados, o hexagono seis, o heptagono sete, o octogono oito, o eneagono nove, o decagono dez, &c. Ibid.
- XXII. Medida da superficie de hum po-

- polygono regular.* 24.
 O apothéma he a perpendicular a-
 baixada do centro da figura sobre
 hum dos seus lados. Ibid.
- XXIII. Triangulo equilatero he a-
 quelle, que tem os tres lados
 iguaes. 25.
 Modo de descrever o triangulo equi-
 latero. Ibid.
- XXVI. Tendo-se reconhecido os tres
 lados de hum triangulo, fazer ou-
 tro, que lbe seja igual. 28.
- XXVII. Hum angulo he a inclinação
 de huma linha sobre outra. 30.
- XXVIII. Modo de fazer hum angu-
 lo igual a outro. Ibid.
 Dados dous lados, e o angulo com-
 prendido, está o triangulo deter-
 minado. 31.
- XXIX. Segunda maneira de fazer
 hum angulo igual a outro. 32.
 A corda de hum arco de circulo
 he a recta, que se termina nas duas
 extremidades do arco. Ibid.
- XXX. Dous angulos, e hum lado de-
 ter-

- terminam o triangulo.* 33.
- XXXI. *Triangulo isosceles he aquelle, que tem dous lados iguaes.* 34.
Os angulos, que cêtes lados fazem com a base, são entre si iguaes. Ibid.
- XXXIV. *Em que consiste a semelhança de duas figuras.* 38.
- XXXVI. *Modo de fazer huma figura semelhante a outra.* 39.
- XXXVIII. *Se dous angulos de hum triangulo são iguaes a outros dous de outro triangulo, o terceiro angulo de hum igualará o terceiro angulo do outro.* 42.
- XXXIX. *Dous triangulos, cujos angulos são respectivamente iguaes, tem os seus lados proporcionaes.* 43.
- XL. *Dividir huma linha em quantas partes iguaes se quizer.* 46.
- XLI. *Que cousa seja a quarta linha proporcional a outras tres, e como se acha.* 47.
- XLII. *As alturas dos triangulos semelhantes são proporcionaes aos seus lados.* 48.
- XLIV.

- XLIV. *As áreas dos triangulos semelhantes são entre si , como os quadrados dos seus lados homologos.* 50.
- XLV. *Propriedades das figuras semelhantes tiradas das dos triangulos.* 51.
- XLVII. *As áreas das figuras semelhantes são entre si , como os quadrados dos seus lados homologos.* 54.
- XLVIII. *As figuras semelhantes não são differençadas , senão pelos pe-
tipés , por onde ellas são construi-
das.* 55.
- L. *Maneira de medir a distancia de
hum lugar inaccessivel.* 57.
- LII. *Hum angulo tem por medida o
arco de circulo , que entre si com-
prehendem os seus lados.* 59.
- LIII. *O circulo he dividido em 360
grãos , cada grão em 60 minutos ,
cada minuto em 60 segundos , &c.* 60.
- LIV. *O angulo recto tem 90 grãos ,
e os*

- e os seus lados são perpendiculares
hum ao outro. Ibid.
- LIV. Hum angulo agudo he mais pe-
queno do que hum reſto. 61.
- LVI. Hum angulo obtuſo he maior
do que hum reſto. 60.
- LVII. A ſomma dos angulos feitos
da meſma parte ſobre huma linha
reſta, e que tem o meſmo vertice,
vale 180 grãos. Ibid.
- LVIII. Todos os angulos, que ſe po-
dem fazer á roda de hum meſmo
ponto, são, tomando-os a todos
juntos, iguaes a quatro angulos
rectos. 62.
- LIX. Uſo do instrumento chamado Se-
micirculo dimenſorio, para ſe tomar
a grandeza de hum angulo. Ibid.
- LX. Uſo do Transferidor para fazer
hum angulo de hum numero deter-
minado de partes. 63.
- LXIII. Angulos alternos são os an-
gulos tomados ás avéſſas, que hu-
ma linha reſta fórma de huma, e
outra parte, cabindo ſobre duas
pa-

DAS MATERIAS. 255

- rallelas.* 67.
Estes angulos são iguaes. 68.
 LXIV. *A somma dos tres angulos de hum triangulo he igual a dous angulos rectos.* 69.
 LXVIII. *O angulo exterior de hum triangulo vale os dous angulos interiores oppostos.* 70.
 LXIX. *Hum angulo de hum triangulo isosceles dá os outros dous.* 71.
 LXX. *Os angulos de hum triangulo equilatero, são cada hum de 60 grãos.* Ibid.
 LXXI. *Descripção do exagono.* 72.
 LXXII. *A ametade do angulo no centro do exagono nos dá o angulo no centro do dodecagono.* 73.
 LXXIII. *Repartir hum angulo em dous igualmente.* 74.
 LXXIV. *Descripção dos polygonos de 24, 48, &c. lados.* Ibid.
 LXXV. *Descripção do octogono.* 75.
E dos polygonos de 16, 32, &c. lados. 76.

R PAR-

 PARTE SEGUNDA

Do methodo geometrico de comparar as Figuras rectilneas.

- I. **D**ous rectangulos, que tem a mesma altura, estam na mesma razao das suas bases. Pag. 80.
- V. Maneira de reduzir hum rectangulo a outro, que tenha huma altura dada. 81.
- VI. Segunda maneira de reduzir hum rectangulo a outro, cuja altura seja dada. 82.
- VII. Demonstra-se rigorosamente, que se dous rectangulos são iguaes, a base do primeiro he para a base do segundo, como a altura do segundo para a altura do primeiro. 84.
- VIII. Se quatro linhas forem taes, que a primeira seja para a segunda, como a terceira para a quarta, o rectangulo formado pela primeira, e pela quarta será igual

ao que formam a segunda, e a terceira. 85.

IX. Quatro quantidades, das quaes a primeira he para a segunda, como a terceira para a quarta, se diz que estão em proporção, ou que formam huma proporção. 85.

X. Dos quatro termos de huma proporção, o primeiro, e o quarto se chamam termos extremos, e medios o segundo, e o terceiro. 86.

XI. Em huma proporção, o produeto dos extremos he igual ao produeto dos medios. Ibid.

XII. Se o produeto dos extremos he igual ao produeto dos medios, os quatro termos formam huma proporção. 87.

XIII. Disto se tira a regra de tres. Ibid.

Ou a maneira de achar o quarto termo de huma proporção, da qual sejam dados os tres primeiros. 88.

XVI. Fazer hum quadrado duplo de outro. 91.

- XVII. Fazer hum quadrado igual a outros dous desiguaes. 92.
- XVIII. O lado maior de hum triangulo reſtângulo ſe chama hypothenuſa; e o quadrado feito por eſte lado maior, he igual á ſomma dos quadrados feitos pelos outros dous lados. 95.
- XIX. De donde ſe tira hum modo ſimples de reduzir dous quadrados a hum ſómente. Ibid.
- XX. Se os lados de hum triangulo reſtângulo ſervirem de baſes a tres figuras ſemelhantes, a figura, que ſe fizer ſobre a hypothenuſa, ſerá igual ás outras duas. 96.
- XXI. Reduzir varias figuras ſemelhantes a huma ſómente. 97.
- XXIII. O produſto, que resulta da multiplicação de hum numero por ſi meſmo, he o quadrado deſte numero. 100.
- A raiz de hum quadrado he o numero, que multiplicado por ſi meſmo, dá o quadrado. Ibid.
- XXIV.

- XXIV. *Hum numero he multiplice de outro, quando elle o contém varias vezes exactamente.* 101.
O lado de hum quadrado, e a sua diagonal são incommensuraveis. 102.
- XXV. *Outras linhas incommensuraveis.* Ibid.
- XXVII. *Os triangulos, e as figuras semelhantes tem os seus lados proporcionaes, ainda quando estes lados são incommensuraveis.* 106.
- XXVIII. *Estas figuras são sempre entre si, como os quadrados dos seus lados homologos.* Ibid.

PARTE TERCEIRA

Da medição das Figuras circulares, e das suas propriedades.

- I. **A** Medida do circulo he o producto da sua circumferencia por a metade do seu radio. 112.
- II. *A área do circulo he igual a hum triangulo, que tem por altura o ra-*

- radio, e por base huma recta igual á circumferencia. Ibid.
- IV. Tendo o diametro 7 partes, a circumferencia tem perto de 22. 113.
- V. As circumferencia dos circulos são entre si, como os seus radios. 114.
- VI. As áreas dos circulos são proporcionaes aos quadrados dos seus radios. 115.
- VII. De tres circulos, a que servirem de radios os tres lados de hum triangulo rectangulo, aquelle de que for radio a hypothemusa, valerá tanto, como os outros dous. 116.
- VIII. Huma coroa he o espaço comprehendido entre dous circulos concentricos. 117.
Para se ter a medida de huma coroa, he necessurio multiplicar a sua grossura pela circumferencia media. 119.
- IX. O segmento de circulo he hum espaço terminado por hum arco, e pela sua corda. 120.
A medida de todas as figuras circulares.

culares se reduz áquella do segmento. Ibid.

X. O sector he huma porção de circulo terminada por dous radios, e pelo arco, que elles comprehendem. 121.

A sua medida he a do segmento. Ibid.

XI. Achar o centro de hum arco de qualquer circulo. Ibid.

XIII. Se de qualquer ponto da circumferencia de hum semicirculo se tirarem duas rectas ás extremidades do diametro, se terá hum angulo recto. 124.

XV. Todos os angulos, que tem os seus vertices na circumferencia, e que assentão sobre o mesmo arco, são iguaes, e tem por medida commua a metade do arco, em que se assentão. 128.

XVIII. A tangente ao circulo he huma linha, que sómente o toca em hum só ponto. 131.

O angulo do segmento he aquelle, que he feito pela corda, e pela tangente. 132.

Tem

Tem por medida a metade do arco do segmento. Ibid.

XIX. *A tangente he perpendicular ao diametro, que passa pelo ponto, em que ella toca na circumferencia.* 133.

XXI. *Que cousa seja hum segmento capaz de hum angulo dado.* 135.
Maneira de fazer hum segmento capaz de hum angulo dado. Ibid.

XXII. *Achar a distancia de hum lugar a outros tres, dõs quaes se sabem as posições.* 136.

XXIII. *Se duas cordas se cortarem em hum circulo, o rectangulo das partes de huma he igual ao rectangulo das partes da outra.* 140.

XXIV. *O quadrado de huma perpendicular qualquer ao diametro de hum circulo, he igual ao rectangulo das duas partes do diametro.* Ib.

XXV. *Reduzir hum rectangulo a hum quadrado.* 141.

XXVI. *Que cousa seja huma media proporcional entre duas linhas rectas.* 142.

Ma-

- Maneira de a achar.* Ibid.
- XXVII. *Outro modo.* 143.
- XXVIII. *Reduzir huma figura re-
ctilinea a hum quadrado.* 144.
- XXX. *Fazer hum quadrado, que se-
ja para outro em razão dada.* 145.
- XXXI. *Fazer hum polygono, que ef-
teja em razão dada com outro po-
lygono semelhante.* 146.
- XXXII. *Fazer hum circulo, que seja
para outro circulo em razão dada.*
147.
- XXXIII. *Se de hum ponto tomado fó-
ra do circulo se tiram duas linbas,
que o atravessem, os rectangulos
destas duas rectas feitos pelas suas
partes exteriores, serão iguaes.* Ib.
- XXXIV. *O quadrado da tangente he
igual ao rectangulo da secante pe-
la sua parte exterior.* 149.
- XXXV. *Tirar huma tangente ao cir-
culo de hum ponto dado fóra delle.*
Ibid.

PAR-

 PARTE QUARTA

Da maneira de medir os sólidos, e as suas superficies.

- I. **O** Cubo he hum sólido terminado por seis quadrados. Esta he a medida commua dos sólidos. 153.
- II. O parallelepipedo he hum sólido terminado por seis rectangulos. 154. Planos parallellos são aquelles, que conservam sempre entre si a mesma distancia. Ibid.
- III. Medição do parallelepipedo. 155.
- IV. Os parallelepipedos são produzidos por hum rectangulo, que se move parallelamente a si mesmo. 157.
- V. A linha perpendicular a hum plano he aquella, que não pende para alguma parte deste plano. Ibid. O mesmo he de hum plano perpendicular a outro plano. Ibid.
- VI. A linha, que he perpendicular a hum plano, he perpendicular a todas

- das as linhas deste plano, que partem do ponto, em que esta linha cabe.* 158.
- VIII. *Prática simples para levantar, ou abaixar perpendiculares aos planos.* 160.
- IX. *Huma linha será perpendicular a hum plano, se ella for perpendicular a duas linhas deste plano, que partem do ponto, em que ella cabe.* Ibid.
- X. *Maneira de levantar hum plano perpendicular a outro.* 161.
- XI. *Para se pôr hum plano parallello a outro.* 162.
- XII. *Medir a inclinação de hum plano sobre outro.* 163.
- XIII. *Medir a inclinação, que huma linha tem, sobre hum plano.* Ibid.
- XIV. *Nova maneira de abaixar huma linha perpendicular a hum plano dado.* 164.
- XV. *Segunda maneira de levantar huma linha perpendicular a hum plano dado.* 165.
- XVI.

- XVI. O *prisma recto* he huma figura sólida, que tem por bases dous *polygonos iguaes*, e as outras faces *rectangulares*. Ibid.
- XVII. *Formação dos prismas rectos*. 166.
- XIX. Dous *prismas*, que tem as suas bases *iguaes*, estão na mesma razão das suas alturas. Ibid.
- XX. Dous *prismas*, que tem a mesma altura, estão na mesma razão das suas bases. 167.
- XXI. A medida do *prisma recto* he o *producto* da sua base pela sua altura. 168.
- XXII. Os *prismas obliquos* differem dos *prismas rectos*, em que as faces destes são compostas de *rectangulos*, e as daquelles de *parallelogramos*. 169.
- XXIII. *Formação dos prismas obliquos*. Ibid.
- XXIV. Os *prismas obliquos* são *iguaes* aos *prismas rectos*, quando elles tem as mesmas bases, e as mesmas
mas

- mas alturas.* 171.
- XXV. O mesmo he dos parallelepipetos obliquos, a respeito dos parallelepipetos rectos. 172.
- XXXII. Em que consiste a semelhança de duas pyramides. 178.
- XXXVII. As pyramides, que tem a mesma base, e a mesma altura, são iguaes. 182.
- XXXVIII. Duas pyramides são também iguaes, se tendo a mesma altura, as suas bases, sem que sejam polygonos semelhantes, são iguaes em superficie. 182.
- XXXIX. As pyramides, que tem a mesma altura, estam entre si como as suas bases. 184.
- XLII. A solidez de qualquer pyramide he o producto da sua base pelo terço da sua altura. 190.
- XLIII. A pyramide he o terço do prisma, que tem a mesma base, e a mesma altura. Ibid.
- XLV. O cylindro he hum sólido terminado por duas bases oppostas, e pa-

- parallelas, que são circulos iguaes, e por hum plano curvado á roda das suas circumferencias.* 191.
- Distinguem-se em cylindro recto, e em cylindro obliquo.* 192.
- XLVI. *Formação do cylindro.* Ibid.
- XLVII. *A superficie curva de hum cylindro recto he igual a hum rectangulo, que tem a mesma altura, e a sua base igual á circumferencia.* 194.
- XLIX. *Os cylindros, que tem a mesma base, e a mesma altura, são iguaes em folidez.* 195.
- L. *A medida de qualquer cylindro he o producto da sua base pela sua altura.* 196.
- LI. *A pyramide cónica he hum sólido, que tem por base hum circulo.* Ibid.
- LII. *Distinguem-se em pyramide cónica recta, e em pyramide cónica obliqua.* 196.
- LIII. *Mede-se a superficie da pyramide cónica recta, multiplicando a metade do seu lado pela circumferen-*

- rencia da sua base.* 198.
- LIV. *A superficie curva de huma pyramide cónica he hum sector de circulo.* Ibid.
- LVI. *As pyramides cónicas, que tem a mesma base, e a mesma altura, são iguaes.* 199.
- LVII. *A medida dellas he o producto da sua base pelo terço da sua altura.* Ibid.
- LIX. *Maneira de medir a superficie de huma pyramide cónica troncada.* 201.
- LX. *A esfera he hum corpo, cuja superficie tem todos os seus pontos igualmente distantes do seu centro.* 202.
- LXV. *A superficie da esfera tem por medida o producto do seu diametro pela circumferencia do seu circulo maximo.* 210.
- LXVI. *Que cousa seja hum segmento de esfera.* 211.
Como se mede a sua superficie. Ibid.
- LXVII. *A superficie da esfera he igual*

igual á do cylindro circumscripto.

212.

LXVIII. *As porções cortadas do cylindro, e da esfera tem a mesma superficie.*

Ibid.

LXIX. *A superficie da esfera he igual áquella do seu circulo maximo quatro vezes.*

213.

LXX. *A solidez da esfera he o producto do terço do seu radio por quatro tantos da área do circulo maximo.*

214.

LXXI. *A solidez da esfera he os dous terços da do cylindro circumscripto.*

Ibid.

LXXII. *Medida da solidez de hum segmento de esfera.*

215.

LXXIII. *Em que consiste a semelhança de dous corpos terminados por planos.*

216.

LXXIV. *Condições, que determinam a semelhança de dous cylindros rectos.*

217.

LXXV. *A de dous cylindros obliquos.*

Ibid.

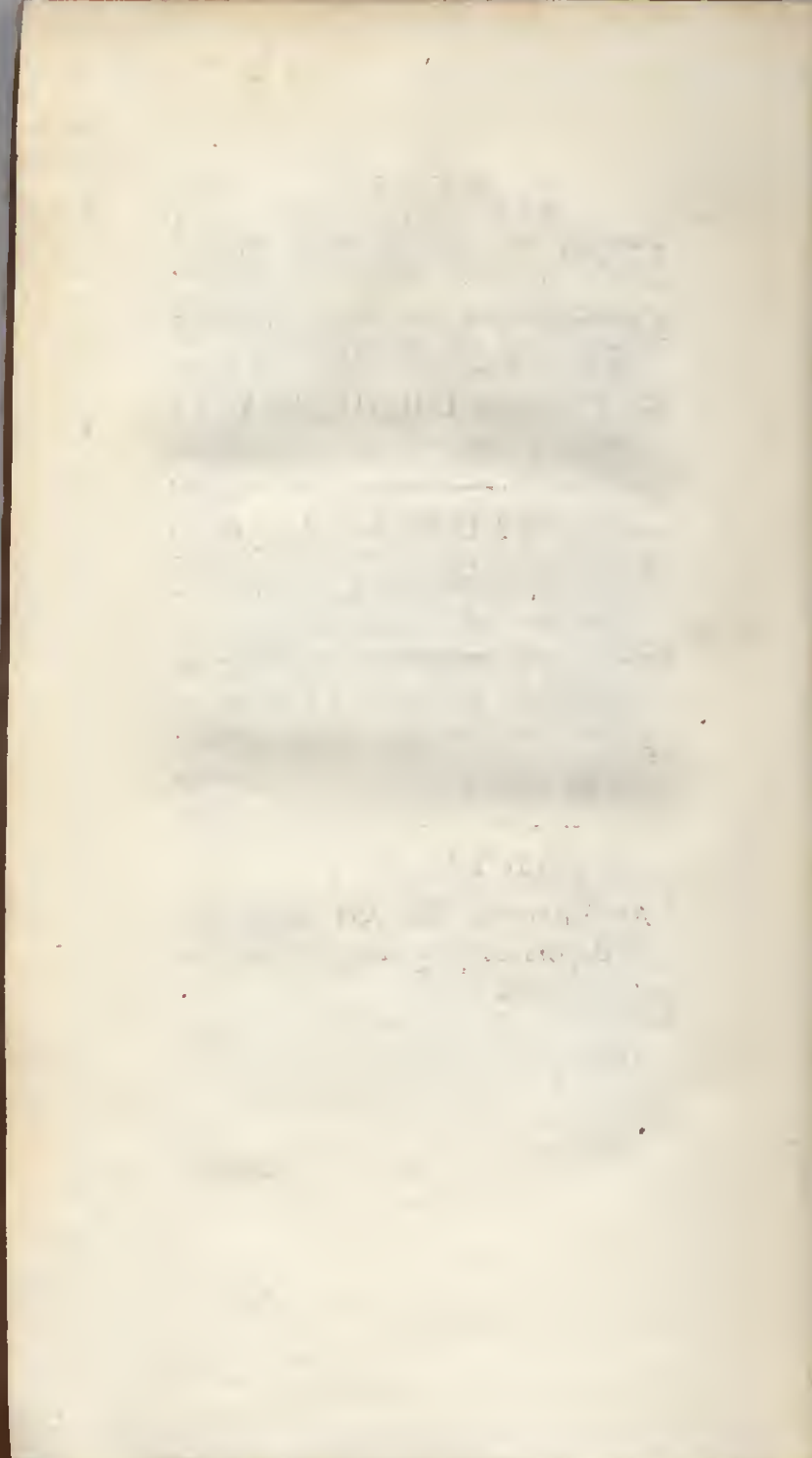
LXXVI.

- LXXVI. *A das pyramides cónicas.*
Ibid.
- LXXVII. *A de duas pyramides cónicas truncadas.* 218.
- LXXVIII. *As esferas , os cubos , e todas as figuras , que não dependem senão de huma só linha , são todas semelhantes.* Ibid.
- LXXIX. *Em geral , os sólidos semelhantes não differem senão pelos pe-
tipés por onde são construidos.* 219.
- LXXX. *As superficies dos sólidos semelhantes são entre si , como os quadrados dos seus lados homologos.* Ibid.
- LXXXI. *As superficies das esferas são entre si , como os quadrados dos radios dellas.* 222.
- LXXXIII. *Os sólidos semelhantes são entre si , como os cubos dos seus lados homologos.* 223.
- LXXXIV. *As esferas são entre si , como os cubos dos radios dellas.* 225.

FIM DO INDICE.

S

AVI-



A V I S O

*Para se situarem as Estampas nos seus
respectivos lugares.*

PARTE PRIMEIRA.

As Estampas I. II. III. IV. V. VI.
entre a pag. 76. e 77.

PARTE SEGUNDA.

A Estampa VII. entre a pag. 108.
e 109.

PARTE TERCEIRA.

As Estampas VIII. IX. X. entre a
pag. 150. e 151.

PARTE QUARTA.

As Estampas XI. XII. XIII. XIV.
depois da pag. 225.

OF THE

PROCEEDINGS OF THE
GENERAL ASSEMBLY OF THE STATE OF NEW YORK

IN SENATE,
JANUARY 18, 1884.

ALBANY:
J. B. WHITTAKER, STATE PRINTER,
1884.

THE STATE OF NEW YORK,
IN SENATE,
JANUARY 18, 1884.

REPORT OF THE
COMMISSIONERS OF THE LAND OFFICE,
IN ANSWER TO A RESOLUTION PASSED
BY THE SENATE, APRIL 18, 1883.



